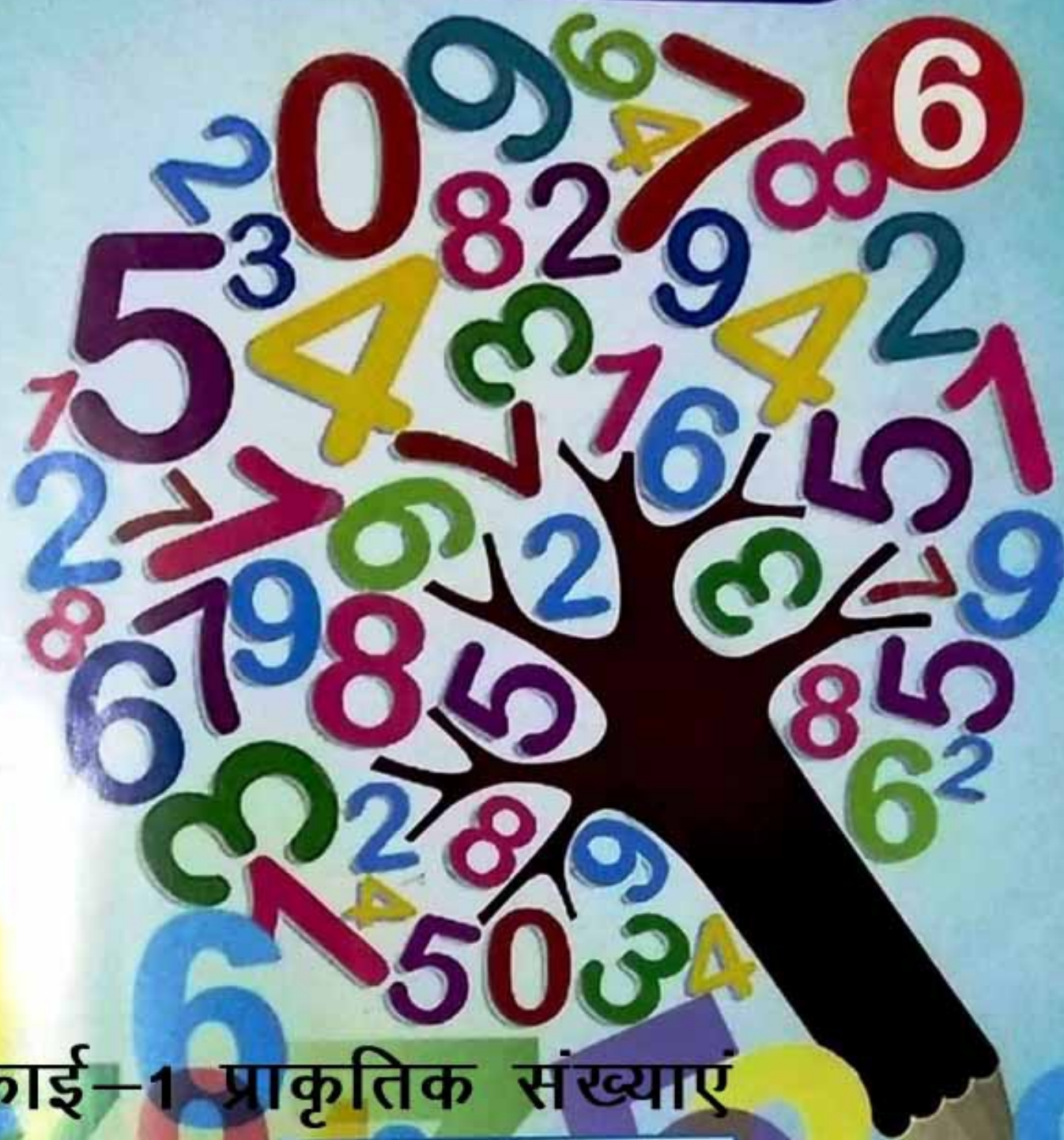
शिक्षा का अधिकार
सर्व शिक्षा अभियान
सब पढ़ें सब बढ़ें
गणित
इकाई–1 प्राकृतिक संख्याएं
निःशुल्क वितरण हेतु
2019–2020

गणित कक्षा:6

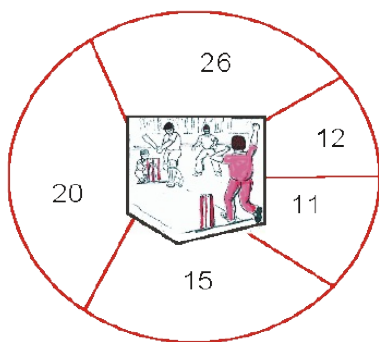
E-BOOKS DEVELOPED BY

1. Dr.Sanjay Sinha Director SCERT,U.P,Lucknow
2. Ajay Kumar Singh J.D.SSA,SCERT,Lucknow
3. Alpa Nigam (H.T) Primary Model School, Tilauli Sardarnagar,Gorakhpur
4. Amit Sharma (A.T) U.P.S, Mahatwani ,Nawabganj, Unnao
5. Anita Vishwakarma (A.T) Primary School ,Saidpur,Pilibhit
6. Anubhav Yadav (A.T) P.S.Gulariya,Hilauli,Unnao
7. Anupam Choudhary (A.T) P.S,Naurangabad,Sahaswan,Budaun
8. Ashutosh Anand Awasthi (A.T) U.P.S,Miyanganj,Barabanki
9. Deepak Kushwaha (A.T) U.P.S,Gazaffarnagar,Hasanganz,unnao
10. Firoz Khan (A.T) P.S,Chidawak,Gulaothi,Bulandshahr
11. Gaurav Singh (A.T) U.P.S,Fatehpur Mathia,Haswa,Fatehpur
12. Hritik Verma (A.T) P.S.Sangramkheda,Hilauli,Unnao
13. Maneesh Pratap Singh (A.T) P.S.Premnagar,Fatehpur
14. Nitin Kumar Pandey (A.T) P.S, Madhyanagar, Gilaula , Shravasti
15. Pranesh Bhushan Mishra (A.T) U.P.S,Patha,Mahroni Lalitpur
16. Prashant Chaudhary (A.T) P.S.Rawana,Jalilpur,Bijnor
17. Rajeev Kumar Sahu (A.T) U.P.S.Saraigokul, Dhanpatganz ,Sultanpur
18. Shashi Kumar (A.T) P.S.Lachchhikheda,Akohari, Hilauli,Unnao
19. Shivali Gupta (A.T) U.P.S,Dhaulri,Jani,Meerut
20. Varunesh Mishra (A.T) P.S.Madanpur Paniyar,Lambhua,Sultanpur

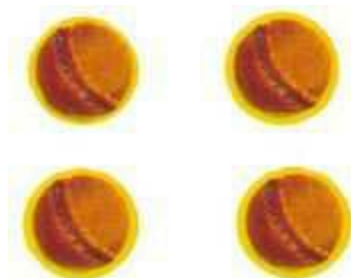
इकाई : 1 प्राकृतिक संख्याएँ

- संख्या और संख्यांक में अन्तर करना
- 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 अंकों का प्रयोग तथा स्थानीय मान पद्धति से संख्याओं का निर्माण
- प्राकृतिक संख्याएँ
- संख्या रेखा का ज्ञान तथा इस पर प्राकृतिक संख्याओं को दर्शाना
- पूर्ववर्ती एवं उत्तरवर्ती संख्याओं का बोध

1.1 भूमिका:

आपने वस्तुओं को गिनना सीख लिया है। दैनिक जीवन के अनेक कार्यों में आप को गिनने की आवश्यकता पड़ती है। अपनी कक्षा के सहपाठियों की संख्या, क्रिकेट मैच में भारतीय टीम द्वारा बनाये गये रनों की संख्या और वार्षिक परीक्षा में प्राप्त कुल अंक आदि। इस प्रकार के अन्य भी अनेक क्रिया-कलाप होते हैं जहाँ हमें गिनने की आवश्यकता पड़ती है। हम वस्तुओं को गिनने के लिए जिन संख्याओं का प्रयोग करते हैं, उन्हें गिनती की संख्याएँ कहते हैं। गिनती की संख्याओं को प्राकृतिक संख्याएँ भी कहते हैं।

इस इकाई का प्रारम्भ हम प्राकृतिक संख्याओं को लिखने के लिए प्रयुक्त संकेतों की चर्चा से करेंगे और फिर प्राकृतिक संख्याओं की कुछ विशेषताओं को जानेंगे।

1.2 संख्या और संख्यांक :

निम्नांकित चित्रों का अवलोकन कीजिए :

चित्र - 1 चित्र - 2 चित्र - 3

चित्र -1 में सेबों की संख्या कितनी है?

चित्र -2 में गेंदों की संख्या कितनी है?

चित्र - 3 में पुस्तकों की संख्या कितनी है?

हम देखते हैं कि चित्रो मे चार-चार वस्तुएॅ हैं। संख्या चार को संकेत 4 द्वारा व्यक्त किया जाता है जो एक संख्यांक है। इसी प्रकार संख्या पाँच को संख्यांक 5 तथा संख्या सात को संख्यांक 7 द्वारा व्यक्त करते हैं। 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8और 9 संख्यांक हैं। इन संख्यांकों की सहायता से ही विभिन्न संख्याएँ निरूपित की जाती हैं।

" कितनी वस्तुएँ हैं" का जिससे बोध होता है, उसे संख्या कहते हैं।

संख्याओं को जिन संकेतों द्वारा व्यक्त करते हैं, उन्हें संख्यांक कहते हैं।

संख्यांक का अर्थ है संख्या को लिखने के लिए प्रयुक्त अंक।

यह भी जानें : *सबसे पहले विभिन्न सभ्यताओं में* 1 *से लेकर* 9 *तक संख्याओं के लिए संकेत विकसित हुए हैं।*

निम्नांकित सारणी का अवलोकन कीजिए, जिसमें एक से नौ तक की संख्याओं को संकेतों द्वारा विभिन्न लिपियों में प्रदर्शित किया गया है -

देवनागरी	१	२	३	४	५	६	७	८	९
रोमन	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
अरबी	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
अन्तर्राष्ट्रीय	1	2	3	4	5	6	7	8	9

बाद में भारतीयों ने जब शून्य '0' *का आविष्कार किया तो इसकी सहायता से छोटी-बड़ी हर प्रकार की संख्या को लिखना संभव हो सका।*

यहाँ हम देखते हैं कि संख्यांक, संख्या को निरूपित करने वाला संकेत ही होता है। ध्यान दें, अब हम आगे संख्यांक को संक्षेप में अंक ही कहेंगे।

1.3 स्थानीय मान पद्धति से संख्याओं का निर्माण

पिछली कक्षाओं में हम संख्याओं को लिखना एवं पढ़ना सीख चुके हैं। निम्नलिखित सारणी का अवलोकन कीजिए :

संख्या	शब्दों में	संख्या में प्रयुक्त अंक
23	तेईस	2, 3
705	सात सौ पाँच	0, 5, 7
2512	दो हजार पाँच सौ बारह	1, 2, 5
84096	चौरासी हजार छियानबे	0, 4, 6, 8, 9

यहाँ हम देखते हैं कि विभिन्न संख्याओं के निर्माण में 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 *अंकों का ही प्रयोग किया गया है।*

क्रिया-कलाप

कागज के तीन कार्ड पर अलग - अलग तीन अंक यथा [2], [3], [5] *लिखिए। इन्हें विभिन्न प्रकार से निम्नवत् रखकर तीन अंकों की संख्याएँ बनाइए।*

आप इन्हें निम्नांकित प्रकार से रख सकते हैं:

[2] [3] [5]

[2] [5] [3]

[3] [2] [5]

[3] [5] [2]

[5] [3] [2]

[5] [2] [3]

यहाँ हम देखते हैं कि इन कार्डों से 2,3, *तथा* 5*से तीन अंकों की कुल संख्याएँ* 235, 253, 325, 352, 532, *एवं* 523 *बनायी जा सकती हैं। इनमें सबसे बड़ी संख्या कौन है*? *और सबसे छोटी* ?

ध्यान दें, *इनमें किसी भी संख्या में अंकों की पुनरावृत्ति नहीं है।*

अंकों 4,0,7 *का प्रयोग कर तीन अंकों की कितनी संख्याएँ बनायी जा सकती हैं*? *क्या* 047 *तीन अंकों की संख्या है*?

इसी प्रकार 7, 6 *और* 0 *लेकर तीन अंकों की सबसे बड़ी संख्या लिखनी हो तो वह संख्या* 760 *होगी परन्तु सबसे छोटी संख्या* 067 *न होकर* 607 *होगी। सबसे छोटी संख्या में शून्य को छोड़कर सबसे छोटा अंक सैकड़े के स्थान पर*, 0 *दहाई के स्थान पर और सबसे बड़ा अंक इकाई के स्थान पर है।*

सैकड़ा	दहाई	इकाई	अंक
4	7	9	आरोही क्रम में
9	7	4	अवरोही क्रम में

निष्कर्ष :

- सबसे छोटी संख्या प्राप्त करने के लिए शून्येतर (शून्य को छोड़कर अन्य सभी) अंकों को बायीं ओर से आरोही क्रम (बढ़ते हुए क्रम) में लिखा जाता ह
- 'शून्य' की दशा में बाएँ से दूसरे स्थान पर 'शून्य' लिखा जाता है।
- दिये गये अंकों को बायीं ओर से अवरोही क्रम (घटते हुए क्रम) में लिखने पर सबसे बड़ी संख्या प्राप्त होती है।

उदाहरण 1 . 5, 3, 8, 1 में सभी अंकों का प्रयोग करके चार अंकों की सबसे बड़ी एवं सबसे छोटी संख्या लिखिए।

हल: सबसे बड़ी संख्या = 8531 (अंक अवरोही क्रम में लिखे गये हैं।)

सबसे छोटी संख्या = 1358 (अंक आरोही क्रम में लिखे गये हैं।)

उदाहरण 2 . अंकों 2, 3 एवं 8का प्रयोग करके चार अंकों की सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : अंक तीन ही हैं किन्तु संख्या चार अंकों की है, अत: हजार एवं सैकड़े के स्थान पर 2, 3, 8 में सबसे बड़ा अंक 8 प्रयुक्त होगा। अतः सबसे बड़ी संख्या = 8832

पुनः 2,3,8 में सबसे छोटा अंक 2, हजार तथा सैकड़े के स्थान पर प्रयुक्त होगा।

अतः सबसे छोटी संख्या =2238

उदाहरण **3** . *अंक* 2,0,5 *और* 0 *लेकर चार अंकों की सबसे बड़ी और सबसे छोटी संख्याओं का अन्तर ज्ञात कीजिए।*

हल **:** *सबसे बड़ी संख्या* = 5200

सबसे छोटी संख्या = 2005

अंतर = 5200 - 2005 =3195

1.3.1 ***सबसे बड़ी एवं सबसे छोटी संख्या***

हम जानते हैं कि सबसे बड़ा अंक 9 *है।*

अत : *एक अंक की सबसे बड़ी संख्या* =9

एक अंक की सबसे छोटी संख्या =1

दो अंकों की सबसे छोटी संख्या=9+ 1=10

दो अंकों की सबसे बड़ी संख्या =99

तीन अंकों की सबसे छोटी संख्या=99 + 1=100

तीन अंकों की सबसे बड़ी संख्या =999

इसी प्रकार,

चार अंकों की सबसे छोटी संख्या=1000

चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या =9999

1.4 ***स्थानीय मान***

पाश्र्वांकित (*दायीं ओर दिये गये*) *चित्र में नगमा और राकेश में से किसकी बात*

आप को सही लगती है ?

आइए, देखते हैं - इन मूल्यों की तुलना करने के लिए इन संख्याओं की तुलना करनी पड़ेगी। हम जानते हैं कि-

1442=1000 + 400 + 40 + 2

1542= 1000 + 500 + 40 + 2

दोनों में हजार की संख्या समान है किन्तु सैंकड़े में अन्तर है। अब आप बतायें कि किसकी साइकिल का मूल्य अधिक है ? *चूँकि* 400 *से* 500 *अधिक है, अतः नगमा की साइकिल का मूल्य अधिक है।*

आपने देखा था कि 2,3 *और* 5 *को विभिन्न प्रकार से रखकर तीन अंकों की कुल छह संख्याएँ बनती हैं।*

5,3,2 *अंकों से बनी संख्याओं में से एक संख्या* 523 *है। पहले और तीसरे अंकों को परस्पर* (*आपस में*) *बदलने पर संख्या* 325 *बनेगी।*

523=5X100 + 2x10 + 3X1

और

325=3X100 + 2X10 + 5X1

523 *में* 5 *का मान* 5X 100=500 *है।*

325 *में* 5 *का मान* 5X1=5 *है।*

हम देखते हैं कि स्थान के बदलने से अंक का मान बदल जाता है। अत :

किसी संख्या में प्रत्येक स्थान के संगत अंक का मान अलग-अलग

होता है,इसे अंक का स्थानीय मान कहते हैं।

उदाहरण **4.** *संख्या* 3477 *में दोनों* 7 *के स्थानीय मान अलग-अलग ज्ञात कीजिए।*

हल: 3477= 3000 + 400 + 70 + 7

हम देखते हैं कि दाहिनी ओर से

पहले 7 *का स्थानीय मान* = 7

तथा दूसरे 7 *का स्थानीय मान*= 70

अभ्यास **1 (a)**

1.*निम्नांकित संख्याओं को संख्यांकों में व्यक्त कीजिए* :

(i) *चार सौ सत्ताईस* (ii) *तीन हजार पाँच सौ एक*

(iii) *एक सौ पन्द्रह* (iv) *उन्यासी हजार उन्तीस*

2 *अ. निम्नांकित संख्याओं को शब्दों में लिखिए* :

(i) 7019 (ii) 23013

(iii) 69379 (iv) 893059

ब. नीचे लिखे वाक्यों में आयी हुई संख्याओं को शब्दों में लिखिए -

एक रिपोर्ट के अनुसार एक (i)*राम मानव मल में* 100 *जीवाणु अण्डे*, 1000 *जीवाणु-कोश*,10,00,000

बैक्टीरिया (*जीवाणु*) *तथा* 1,00,00,000 *वायरस* (*विषाणु*) *होते हैं।*

3. *निम्नांकित संख्याओं में अंकों को छाँटिए* :

10, 11, 18, 0, 3

4.)1,2,3 *से बनने वाली तीन अंकों की सभी संख्याएँ लिखिए जबकि अंकों की पुनरावृत्ति न हो*।

5.) 0,3,5 *से बनने वाली तीन अंकों की सभी संख्याएँ लिखिए जबकि अंकों की पुनरावृत्ति न हो*।

6.) 6,7,0,5*से चार अंकों की सबसे बड़ी एवं सबसे छोटी संख्या लिखिए*।

7.) *पाँच अंकों की सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी संख्या लिखिए*।

8.) 5231 *में प्रत्येक अंक का स्थानीय मान ज्ञात कीजिए*।

9.)636 *में दोनों* 6 *के स्थानीय मान ज्ञात कीजिए* ।

10.) 3334 *में* 3 *के विभिन्न स्थानीय मानों का योगफल ज्ञात कीजिए*।

11).22222 *में प्रत्येक* 2 *का स्थानीय मान ज्ञात कीजिए और इनका योगफल ज्ञात कीजिए* ।

12). 545 *में प्रयुक्त प्रथम* 5 *तथा द्वितीय* 5 *के स्थानीय मानों का अन्तर ज्ञात कीजिए*।

1.5 ***प्राकृतिक संख्याएँ*** **(Natural Numbers)**

पार्श्वांकित चित्र का अवलोकन करके बताइए :

1. चित्र में कितने व्यक्ति हैं?

2. इसमें कितने गेंदे के पूâल हैं?

3. पेड़ पर कितने फल हैं?

चित्र में दो व्यक्ति,

पाँच गेंदे के फूल

और पेड़ पर छः फल हैं।

प्रयास कीजिए :

1. अपने स्कूल बैग में रखी पुस्तकों की संख्या गिनिए।

2. कक्षा में उपस्थित विद्यार्थियों की संख्या गिन कर बताइए।

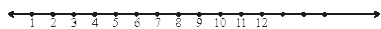
3. अपनी कक्षा में उपस्थित बालक और बालिकाओं की संख्या अलग-अलग बताइए।

ध्यान दीजिए :

गिनती करने वाली संख्याएँ 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., ही प्राकृतिक या प्राकृत संख्याएँ कहलाती हैं।

1.6. *प्राकृतिक संख्याओं का संख्या-रेखा पर प्रदर्शन :*

कोई रेखा खींचिए। उस पर समान दूरी के अन्तर पर बिन्दुओं को चिह्नित कीजिए। इन बिन्दुओं द्वारा क्रम से संख्याएँ 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... *निरूपित कीजिए।*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

वस्तुओं की गिनती 1 *से ही प्रारम्भ होती है, अत: हम कह सकते हैं।***1** *सबसे छोटी एवं पहली प्राकृतिक संख्या है।*

1*की अगली प्राकृतिक संख्या* 1*है।* 1 *में* 1 *जोड़ने पर* 1 *प्राप्त होता है। इसी प्रकार* 2 *में*1 *जोड़ने पर प्राकृतिक संख्या* 3 *प्राप्त होती है। इसी प्रकार* 3+ 1 = 4, 4+ 1 =5, *इत्यादि। इस प्रकार किसी प्राकृतिक संख्या में* 1 *जोड़ने पर उसकी अगली* (*ठीक बाद वाली*) *प्राकृतिक संख्या प्राप्त होती है जिसे उसकी अनुवर्ती संख्या अथवा उत्तरवर्ती संख्या कहते हैं। इसी प्रकार किसी प्राकृतिक संख्या से* 1 *घटाने पर उसके ठीक पहले वाली प्राकृतिक संख्या प्राप्त होती है। जिसे उसकी पूर्ववर्ती संख्या कहते हैं। अतः इस प्रकार* 9,10 *की पूर्ववर्ती संख्या है, जबकि* 10, 9*की अनुवर्ती संख्या है।*

ध्यान दीजिए :

किसी प्राकृतिक संख्या के ठीक बाद वाली प्राकृतिक संख्या उसकी अनुवर्ती संख्या उत्तरवर्ती संख्या होती है और ठीक पहले वाली प्राकृतिक संख्या उसकी पूर्ववर्ती संख्या होती है।

हमने देखा कि किसी भी प्राकृतिक संख्या में 1 *जोड़ने से उसकी अनुवर्ती प्राकृतिक संख्या प्राप्त हो जाती है। इस प्रकार ली गयी प्रत्येक प्राकृतिक संख्या की अनुवती संख्या भी प्राकृतिक संख्या होती है।*

प्रयास कीजिए :

1.79 *की अनुवर्ती प्राकृतिक संख्या बताइए*?

2.100 *की पूर्ववर्ती प्राकृतिक संख्या क्या है* ?

3. 1005*की अनुवर्ती प्राकृतिक संख्या बताइए*?

4. 99999 *की पूर्ववर्ती प्राकृतिक संख्या क्या है*?

5. *सबसे बड़ी प्राकृतिक संख्या बताइए*।

आह! सबसे बड़ी प्राकृतिक संख्या?

*आप सबसे बड़ी प्राकृतिक संख्या बताने में कठिनाई अनुभव करेंगे। आप किसी भी बड़ी संख्या की कल्पना करें, वह सबसे बड़ी प्राकृतिक संख्या नहीं होगी क्योंकि उसमें भी*1 *जोड़कर उसके आगे वाली प्राकृतिक संख्या प्राप्त की जा सकती है। अत* :

***निष्कर्ष* :**

कोई भी प्राकृतिक संख्या सबसे बड़ी प्राकृतिक संख्या नहीं होती है, क्योंकि उसकी अनुवर्ती संख्या उससे भी बड़ी होती है ।

चार्ट अवलोकन : *सारणी को देखकर रिक्त स्थान* ☐ *की पूर्ति कीजिए*

बड़ी है (>) / छोटी है (<)	संख्या रेखा पर स्थित बायीं / दायीं ओर
3 > 2	2 की दायीं ओर 3 है।
5 > 3	3 की दायीं ओर 5 है।
8 ☐ 7	7 की ☐ ओर 8 है।
1 < 2	2 की बायीं ओर 1 है।
3 ☐ 4	4 की ☐ ओर 3 है।
2 < 5	5 की बायीं ओर 2 है।
8 ☐ 6	6 की ☐ ओर 8 है।
10 ☐ 12	12 की ☐ ओर 10 है।
3 ☐ 5	5 की ☐ ओर 3 है।
7 ☐ 4	4 की ☐ ओर 7 है।

इससे क्या निष्कर्ष निकलता है ?

संख्या रेखा पर प्रत्येक प्राकृतिक संख्या अपनी बायीं ओर की प्रत्येक प्राकृतिक संख्या से बड़ी होती है तथा अपनी दायीं ओर की प्रत्येक प्राकृतिक संख्या से छोटी होती है।

1.7. *पूर्ववर्ती और अनुवर्ती संख्याएँ*

हम पूर्ववर्ती तथा अनुवर्ती संख्याओं से परिचित हैं। अनुवर्ती संख्याओं को उत्तरवती भी कहते हैं। सारणी का अवलोकन कर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

प्राकृतिक संख्या	5	6	13	8	20	40	22	2	1
पूर्ववर्ती प्राकृतिक संख्या	4	5	-	-	-	39	21	-	कोई नहीं

हम जानते हैं कि 1 *पहली और सबसे छोटी प्राकृतिक संख्या है। अत* : *हम यह कह सकते हैं कि* 1 *की कोई पूर्ववर्ती प्राकृतिक संख्या नहीं होती है*।

निम्नांकित सारणी का भी अवलोकन कर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

प्राकृतिक संख्या	1	3	5	-	25	19	23	-
अनुवर्ती संख्या	2	4	-	18	-	-	-	1

उपर्युक्त से यह निष्कर्ष प्राप्त होता है कि :

1 किसी भी प्राकृतिक संख्या की अनुवर्ती प्राकृतिक संख्या नहीं है

क्रमागत संख्याएँ :-

क्रम से एक के बाद एक आने वाली प्राकृतिक संख्याएँ क्रमागत संख्याएँ कहलाती हैं। जैसे :- 4, 5, 6,... 108, 109, 110, ... ***आदि***

उदाहरण 5. तीन अंकों की सबसे छोटी प्राकृतिक संख्या लिखिए । इसकी पूर्ववती प्राकृतिक संख्या ज्ञात कीजिए।

हल :तीन अंकों की सबसे छोटी प्राकृतिक संख्या =100

100 ***की पूर्ववर्ती संख्या***=100- 1 =99

उदाहरण 6. चार अंकों की सबसे बड़ी प्राकृतिक संख्या लिखिए। इसकी अनुवती प्राकृतिक संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : चार अंकों की सबसे बड़ी प्राकृतिक संख्या=9999

9999 ***की अनुवर्ती संख्या*** =9999 + 1 =10000

उदाहरण 7. 3775 ***की अनुवर्ती प्राकृतिक संख्या ज्ञात कीजिए।***

हल : 3775 ***की अनुवर्ती प्राकृतिक संख्या*** =3775 + 1= 3776

उदाहरण 8. 3776 ***की पूर्ववर्ती प्राकृतिक संख्या क्या है*** ?

हल: 3776 ***की पूर्ववर्ती प्राकृतिक संख्या*** =3776 - 1=3776

उदाहरण 9. 20 ***से आगे की तीन क्रमागत संख्याएॅ ज्ञात कीजिए।***

हल : 220 ***से आगे की तीन क्रमागत संख्याएॅ*** 21,22,23 ***हैं।***

अभ्यास **1 (b)**

निम्नांकित सारणियों में रिक्त स्थानों की पूर्ति के लिए सारणी के नीचे चार विकल्प दिये गये हैं जिनमें से केवल एक ही सही है। सही विकल्प चुन कर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

1.

4	5	6	7	8
23	24	25		27

(i) 21 (ii) 22 (iii) 26 (iv) 28

2.

9	8	7	6	5
35	34		32	31

(i) 36 (ii) 33 (iii) 30 (iv) 28

3. ***निम्नांकित प्रश्नों में उत्तर के चार विकल्प दिये गये हैं। सही उत्तर छाँट कर लिखिए*** :

(क) 13***की अनुवर्ती प्राकृतिक संख्या है*** :

(i) 27 (ii) 12 (iii) 14 (iv) 16

(ख) 27 ***की पूर्ववर्ती प्राकृतिक संख्या है*** :

(i) 27 (ii) 26 (iii) 28 (iv) 25

(ग) 6 ***की अनुवर्ती प्राकृतिक संख्या है*** :

(i) 6 ***और*** 7(ii) ***केवल*** 8 (iii) 6,7***और*** 8 (iv) ***केवल*** 7

(घ) 15 ***की पूर्ववर्ती प्राकृतिक संख्या है*** :

(i) ***केवल*** 14 (ii) 14 ***और*** 15 (iii) 14 ***और*** 16(iv) ***केवल*** 16

4. *निम्नलिखित कथनों में सत्य और असत्य छाँटिए* :

(i) 1 *सबसे छोटी प्राकृतिक संख्या है।*

(ii) *संख्या - रेखा पर निरूपित किसी प्राकृतिक संख्या की दाहिनी ओर की प्राकृतिक संख्याएँ उससे छोटी होती हैं।*

(iii) 101 *से बड़ी क्रमागत संख्याएँ* 102, 103, 104 *हैं।*

(iv) 0 *एक प्राकृतिक संख्या है।*

(v) 23 *एक प्राकृतिक संख्या है।*

(vi) *प्राकृतिक संख्याओं में कोई संख्या सबसे बड़ी नहीं होती है।*

5. 9999*की अनुवर्ती प्राकृतिक संख्या ज्ञात कीजिए।*

6. 100001 *की पूर्ववर्ती प्राकृतिक संख्या ज्ञात कीजिए।*

7. *संख्या रेखा खीचिंए और उस पर* 9 *तक की प्राकृतिक संख्याएँ प्रदर्शित कीजिए।*

8. *चार अंकों की छोटी से छोटी प्राकृतिक संख्या लिखिए। इसकी पूर्ववर्ती प्राकृतिक संख्या ज्ञात कीजिए।*

9. *छह अंकों की बड़ी से बड़ी प्राकृतिक संख्या लिखकर इसकी अनुवर्ती प्राकृतिक संख्या ज्ञात कीजिए।*

इस इकाई में हमने सीखा

1.*प्राकृतिक संख्या से 'कितनी वस्तुएँ हैं' का बोध होता है।*

2. *संख्याओं को जिन संकेतों द्वारा व्यक्त करते हैं, उन्हें संख्यांक कहते हैं।*

3.*किसी संख्या में प्रयुक्त अंकों के मान उनके स्थान के संगत अलग-अलग होते हैं।*

4.*सबसे छोटी प्राकृतिक संख्या* 1 *है।*

5.*कोई भी प्राकृतिक संख्या सबसे बड़ी प्राकृतिक संख्या नहीं होती है, क्योंकि उसकी भी एक अनुवर्ती प्राकृतिक संख्या होती है।*

6.*प्राकृतिक संख्याओं में* 1 *की पूर्ववर्ती प्राकृतिक संख्या नहीं होती है।*

7.*प्राकृतिक संख्या* 1 *के अतिरिक्त अन्य किसी भी प्राकृतिक संख्या की केवल एक पूर्ववर्ती प्राकृतिक संख्या होती है, जो उससे* 1*कम होती है।*

8.*किसी भी प्राकृतिक संख्या की केवल एक ही अनुवर्ती प्राकृतिक संख्या होती है, जो उससे* 1 *अधिक होती है।*

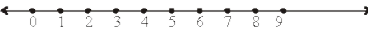
9.*संख्या रेखा पर दायीं ओर की संख्याएँ अपनी बायीं ओर की संख्याओं से बड़ी होती हैं।*

10. *क्रम से एक के बाद एक आने वाली संख्याएँ क्रमागत संख्याएँ कहलाती हैं।*

11. *शून्य* (0) *को प्राकृतिक संख्याओं के साथ सम्मिलित करने पर प्राप्त संख्याएँ 'पूर्ण संख्याएँ' कहलाती हैं।*

12. *सबसे छोटी पूर्ण संख्या* '0' *है।*

13. *कोई भी पूर्ण संख्या सबसे बड़ी पूर्ण संख्या नहीं होती हैं, क्योंकि उसकी भी अनुवर्ती एक पूर्ण संख्या होती है।*

उत्तर माला

***अभ्यास* 1(a)**

1. (i) 427, (ii) 3501, (iii) 115, (iv) 79029, 2. (*अ*). (i)*सात हजार*

उन्नीस (ii) ***तेईस हजार तेरह*** (iii) ***उनहत्तर हजार ती सौ उन्यासी*** (iv)***आठ लाख, तिरानबे हजार उनसठ***,(***ब***) ***एक सौ***; ***एक हजार***; ***दस लाख तथा एक करोड़*** 3. 1, 0; 1; 1, 8; 0; 3. 4. 123, 132, 213, 231, 312, 321. 5. 305, 350, 503, 530,6.7650, 5067. 7. 99999, 10000.8. 5 ***का स्थानीय मान*** 5000, 2 ***का*** 200, 3 ***का*** 30 ***तथा*** 1 ***का*** 1 ***है।*** 9. 600, 6. 10. 3330. 11. 20000, 2000, 200, 20, 2; 22222. 12. 495

अभ्यास 1(b)

1. (iii) 26, 2. (ii) 33, 3. (***क***) (iii) 14; (***ख***) (ii) 26; (***ग***) (iv) ***केवल*** 7; (***घ***) (i) ***केवल*** 14,

4. (i) ***सत्य***, (ii)***असत्य***, (iii) ***सत्य***, (iv)***असत्य***, (v) ***सत्य***, (vi) ***सत्य***, 5. 10000. 6. 100000.

7. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 8. 1000, 999;

9. 999999, 1000000.

***श्रीधराचार्य* (991ई.)**

श्रीधर जी का जन्म* 991 *ई. में कर्नाटक प्रान्त में हुआ। 'गणित सार' इनका बहुचर्चित ग्रन्थ है।* 300 *श्लोकों वाला यह ग्रन्थ त्रिशतिका के नाम से प्रसिद्ध है। जिनमें निम्न का समावेश है।

प्राकृतिक संख्याओं की मालाएँ, गुणन, भाग, शून्य, वर्ग, वर्गमूल, घनमूल, भिन्न, ब्याज, मिश्रण, साझा तथा मापिकी।

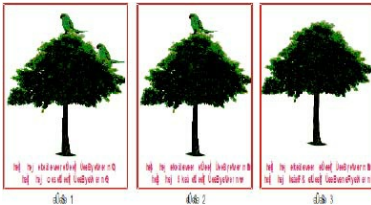
इकाई 2 -पूर्ण संख्याएं

- पूर्ण संख्याएँ
- संख्या रेखा पर पूर्ण संख्याओं का प्रदर्शन
- क्रमागत पूर्ण संख्याएँ
- पूर्ण संख्याओं पर संक्रियाएँ तथा गुणधर्म

2.1 भूमिका :

आपने प्राकृतिक संख्याओं के विषय में जानकारी प्राप्त कर ली है। क्या हमारा काम इन्हीं संख्याओं से चल सकता है ? यह एक विचारणीय विषय है। आवश्यकतानुसार प्राकृतिक संख्याओं के समूह को पूर्ण संख्याओं के समूह में परिवृद्धित करना होगा तथा पूर्ण संख्याओं पर होने वाली विभिन्न संक्रियाओं (जोड़, घटाना, गुणा एवं भाग) को ध्यानपूर्वक देखने से उनके अनेक प्रगुण (नियम) दिखाई देते हैं। इन प्रगुणों (नियम) को यथास्थान प्रयोग करने से संक्रियाओं को सरल बनाया जा सकता है।

2.2 पूर्ण संख्याएँ (Whole Numbers)

आइए, यह स्थिति देखिए -

चित्र 1 एवं चित्र 2में आप वृक्ष पर बैठी चिड़ियों की संख्या बता सकते हैं, लेकिन

तीसरे वृक्ष पर चिड़ियों की स्थिति को क्या आप किसी संख्या द्वारा बता सकते हैं? अभी तक हमें जिन गिनती की संख्याओं 1, 2,3,... *की जानकारी हो चुकी है, उनमें ऐसी कोई संख्या नहीं है जिसके द्वारा हम तीसरे वृक्ष पर बैठी चिड़ियाँ को बता सकें। इसे हम संख्याक* 0 (*शून्य*) *द्वारा व्यक्त करते हैं। अर्थात् हमें संख्या* 0 *की आवश्यकता है। आइए, अब हम संख्याओं* 0,1,2,3,... *के विषय में जानें।*

एक डिब्बे में 10 *गोलियाँ लीजिए। इन गोलियों को* 10*शिक्षार्थियों में बराबर - बराबर बाँटिए। प्रत्येक शिक्षार्थी को* 1-1 *गोली मिली, डिब्बे में कितनी गोलियाँ बची* ? *स्पष्ट है कि डिब्बे में एक भी गोली नहीं बची। डिब्बे में बची हुई अर्थात् शेष गोलियों की संख्या शून्य* '0' *होगी। जब हम* '0' *को भी प्राकृतिक संख्याओं के साथ सम्मिलित कर लेते हैं तो प्राप्त संख्याएँ 'पूर्ण संख्याएँ' कहलाती हैं।*

इस प्रकार

0, 1, 2, 3, 4, ... ***पूर्ण संख्याएँ हैं।*** **0** ***सबसे छोटी पूर्ण संख्या है। चूँकि प्रत्येक पूर्ण संख्या से बड़ी पूर्ण संख्याएँ होती हैं, अत: कोई भी पूर्ण संख्या सबसे बड़ी पूर्ण संख्या नहीं होती हैं ।***

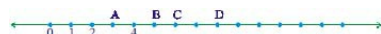
2.3. ***पूर्ण संख्याओं का संख्या-रेखा पर प्रदर्शन :***

संख्या - रेखा पर **0** ***से प्रारम्भ करके सामान दूरी पर पूर्ण संख्याएँ निरूपित कीजिए*** **।**

0 1 2 3 4 5 6

प्रयास कीजिए :

1. *नीचे की संख्या - रेखा देखकर बताइए कि बिन्दुओं* A, B,C *तथा* D *द्वारा कौन सी पूर्ण संख्याएँ निरूपित होती हैं* ?

A B C D
0 1 2 4

2. 1 *की पूर्ववर्ती पूर्ण संख्या बताइए।*

3. 13 *की पूर्ववर्ती पूर्ण संख्या बताइए।*

4. 14 *की अनुवर्ती पूर्ण संख्या क्या है ?*

2.4. *क्रमागत पूर्ण संख्याएँ* :

निम्नांकित संख्याओं के प्रत्येक समूह परध्यान दें,

2, 3, 4 ; 7, 8, 9 ; 15, 17, 20

प्रथम और द्वितीय समूह की संख्याएँ बायें से दायें क्रमशः 1-1 *के अन्तर से बढ़ रही हैं। कैसे?*

चलिए तीन से अधिक संख्याओं का एक अन्य समूह 8, 9, 10, 11, 12 *लेते हैं। इस समूह की संख्याओं की क्या विशेषता है ?*

इस समूह की संख्याएँ भी क्रमशः 1-1 *के अन्तर से बढ़ रही हैं। समूह में आगे आने वाली कोई भी संख्या अपने ठीक पहले की संख्या की उत्तरवर्ती संख्या है। किसी समूह की इस विशेषता वाली सभी संख्याएँ क्रमागत संख्याएँ कहलाती हैं। इस प्रकार प्रथम समूह एवं द्वितीय समूह की संख्याएँ* 2, 3, 4 *एवं* 7, 8, 9 *भी क्रमागत संख्याएँ हैं।*

क्या उपर्युक्त तृतीय समूह की संख्याएँ 15, 17, 20 *क्रमागत संख्याएँ हैं ? स्पष्टतः नहीं, क्योंकि* 15, 17, 20 *क्रमशः* 1 -1 *के अन्तर से नहीं बढ़ रहीं हैं। दूसरे शब्दों में* 17, 15 *की अनुवर्ती नहीं है, और* 20, 17 *की अनुवर्ती नहीं है।*

***ध्यान दीजिए* :**

इसी प्रकार 13,14 और 15 ऐसी पूर्ण संख्याएँ हैं जो एक क्रम में हैं।

ऐसी पूर्ण संख्याओं को क्रमागत पूर्ण संख्याएँ कहते हैं। दो क्रमागत पूर्ण संख्याओं का अन्तर सदैव **1** *होता हैं।*

प्रयास कीजिए :

1. 100 *से ठीक पहले की दो क्रमागत पूर्ण संख्याएँ बताइए।*

2. 101 *से प्रारम्भ होने वाली चार क्रमागत संख्याएँ बताइए?*

3. *तीन क्रमागत संख्याएँ* 3,4 *और* 5 *लीजिए। पहली संख्या और तीसरी संख्या जोड़िए। योगफल का आधा कीजिए। उत्तर से बीच वाली संख्या की तुलना कीजिए।*

4. *कोई भी तीन क्रमागत पूर्ण संख्याएँ लेकर यही क्रिया दुहराइए। क्या निष्कर्ष निकलता है?*

आप पायेंगे कि तीन क्रमागत पूर्ण संख्याओं में पहली और तीसरी संख्याओं के योगफल का आधा बीच की संख्या होती है।

उदाहरण **1.** *तीन क्रमागत पूर्ण संख्याओं में पहली और तीसरी का योगफल* 40 *है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।*

हल : *पहली और तीसरी संख्या का योगफल* = 40

∴ *पहली और तीसरी संख्या के योगफल का आधा* =40 / 2=20

∴ *बीच की संख्या* = 20

अत: संख्याएँ 19, 20, 21 *हैं।*

***अभ्यास* 2 (a)**

1. *सबसे छोटी पूर्ण संख्या बताइए।*

2. *संख्या रेखा पर निम्नांकित पूर्ण संख्याओं को प्रदर्शित कीजिए।*

   0, 1, 2, 3, 4, 5

3. *तीन क्रमागत पूर्ण संख्याओं में पहली और तीसरी का योगफल* 28 *है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।*

4. *यदि तीन क्रमागत पूर्ण संख्याओं में मध्य की संख्या* 39 *हो तो तीनो संख्याँ ज्ञात कीजिए*

5. *प्राकृतिक संख्याओं के समूह में किस संख्या के सम्मिलित कर लेने पर वह पूर्ण संख्याओं का समूह बन जाता है।*

2.5. *पूर्ण संख्याओं पर संक्रियाओं के प्रगुण*

2.5.1- *पूर्ण संख्याओं में योग का प्रगुण* :

(i) *योग का संवरक प्रगुण*

पूर्ण संख्याओं के विभिन्न युग्म(जोड़े)लीजिए, जैसे -

(5, 7), (3, 4), (0, 3) ***और*** (0, 0)

प्रत्येक युग्म की संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए ।

पूर्ण संख्या + पूर्ण संख्या	योगफल	पूर्ण संख्या है या नहीं
5+7	12	पूरण संख्या है ।
3+4	☐	पूरण संख्या है ।
0+3	☐	पूरण संख्या है ।
0+0	☐	पूरण संख्या है ।

पूर्ण संख्याओं के ऐसे ही तीन और युग्म लेकर उनके योगफल ज्ञात कर उनका

परीक्षण कीजिए। क्या योगफल सदैव पूर्ण संख्या ही आता है ?

क्या पूर्ण संख्याओं का एक भी युग्म ऐसा मिला जिसका योगफल एक पूर्णसंख्या नहीं है ? ऐसी कोई भी दो पूर्ण संख्याएँ प्राप्त नहीं की जा सकतीं जिनका योगफल एक पूर्णसंख्या न हो।

निष्कर्ष :

दो पूर्ण संख्याओं का योगफल सदैव पूर्ण संख्या होता है। यह पूर्ण संख्याओं के योग का संवरक प्रगुण है।

(ii) *योग का क्रम-विनिमेय प्रगुण*

राधा एक दूकान से पहले 3 टाफियाँ खरीदती है और पुनः 2 टाफियाँ। राधा ने कुल कितनी टाफियाँ खरीदीं ?

महमूद भी उसी दूकान से टाफियाँ खरीदता है। वह पहले 2 टाफियाँ खरीदता है और फिर 3 टाफियाँ। महमूद ने कुल कितनी टाफियाँ खरीदीं ?

राधा और महमूद प्रत्येक ने कुल 5 टाफियाँ खरीदीं।

कोई दो पूर्ण संख्याएँ जैसे 3 और 5 लीजिए और उन्हें जोड़कर रिक्त स्थान भरिए।

$3 + 5 = \square$

पुन संख्याओं के क्रम बदल कर योगफल ज्ञात कीजिए

$5 + 3 = \square$

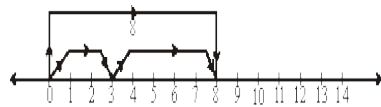
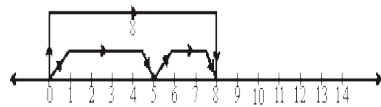
दोनों स्थितियों में योगफल की तुलना कीजिए।

3 + 5= 8= 5 + 3

हम देखते हैं कि

3 + 5= 5 + 3

इस तथ्य को हम संख्या रेखा द्वारा भी समझ सकते हैं।

संख्या-रेखा खींचकर 3 + 5 *का योगफल ज्ञात कीजिए।*

इसी प्रकार दूसरी संख्या रेखा खीचिए और 5 + 3 *का योगफल प्राप्त कीजिए।*

हम देखते हैं कि दोनों स्थितियों में संख्या-रेखा पर प्राप्त योगफल समान हैं।

अत: 3 + 5 = 5 + 3

जाँच कीजिए

पूर्ण संख्याओं के दो अन्य जोड़े जैसे (3, 4) *और* (6, 2) *लेकर जाँच कीजिए।*

3 + 4 =7 *तथा* 4 + 3=7

इसलिए 3 + 4 = 4 + 3

इसी प्रकार 6 + 2= 8*तथा* 2 + 6 = 8

इसलिए 6 + 2 = 2 + 6

पूर्ण संख्याओं का ऐसा कोई भी युग्म प्राप्त नहीं किया जा सकता जिसमें संख्याओं के जोड़ने का क्रम बदलने पर योगफल भिन्न-भिन्न प्राप्त हो।

इस प्रकार हम निष्कर्ष निकालते हैं कि

दो पूर्ण संख्याओं के योगफल पर संख्याओं के क्रम का कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

(iii)*योग का तत्समक अवयव* (Additive Identity)

आप देख चुके हैं कि पूर्ण संख्याओं का संग्रह प्राकृतिक संख्याओं के संग्रह से किस रूप में भिन्न है। पूर्ण संख्याओं के संग्रह में केवल 'शून्य' की उपस्थिति के कारण यह प्राकृतिक संख्याओं के संग्रह से अलग हो जाता है। इस संख्या 'शून्य' की योग में एक विशेष भूमिका है। आइए, इसे देखने के लिए निम्नांकित प्रयास करें :

कुछ पूर्ण संख्याएँ, जैसे 0,1,3,5 *लेकर निम्नांकित रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।*

0 + 0 = ☐

0 + 1 = ☐

0 + 3=3 + 0 = ☐

0 + 5 = 5 + 0=☐

जब आप शून्य को किसी पूर्ण संख्या में जोड़ते हैं, तो क्या परिणाम प्राप्त होता है ?

आप देख सकते हैं कि

किसी पूर्ण संख्या में यदि शून्य को जोड़ा जाता है तो योगफल वही

संख्या होती है। इसी कारण '0' को पूर्ण संख्याओं में योग का तत्समक अवयव कहते हैं। शून्य को पूर्ण संख्याओं के लिए 'योज्य तत्समक' भी कहते हैं।

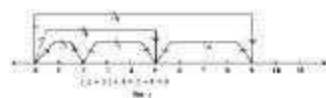
(iv) योग का साहचर्य प्रगुण :

यदि 2,3 और 4 का योगफल संख्याओं के इसी क्रम में हमें ज्ञात करना है तो इसे हम दो प्रकार से कर सकते हैं। पहले 2 और 3 का योगफल ज्ञात कर उसमें 4 जोड़ सकते हैं अथवा 3 और 4 के योगफल ज्ञात कर लें और पुनः 2 में इस योगफल को जोड़ें। दोनों स्थितियों में हमें योगफल वही संख्या प्राप्त होती है, यथा —

(2 + 3) + 4 = 5 + 4 =9

और 2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9

आइए, संख्या रेखा पर इसकी जाँच करते हैं

संख्या रेखा की सहायता से 2,3 और 4 के योगफल को दो प्रकार से दिखाइए।

2 + (3 + 4) =2 + 7=9

चित्र 1

चित्र 2

चित्र 1 और चित्र 2 से हम पाते हैं कि

(2 + 3) + 4 =2 + (3 + 4)

इसी प्रकार से पूर्ण संख्याओं 8, 4, 9 *को क्रम में संख्या-रेखा पर जोड़ेंगे तो पायेंगे*

(8 + 4) + 9 = 8 + (4 + 9)

निष्कर्ष :

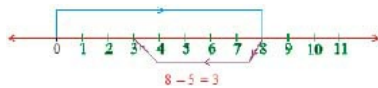
> *तीन पूर्ण संख्याओं को क्रम में जोड़ते समय किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं का समूह पहले बना लेने से योगफल में अन्तर नहीं पड़ता है। यह योग संक्रिया का साहचर्य प्रगुण है।*

2.5.2. *पूर्ण संख्याओं पर घटाने का संवरक प्रगुण*

पूर्ण संख्या के कुछ युग्म लीजिए जैसे

8, 5; 5, 9; 10, 0; 0, 7 *और* 8, 8

प्रत्येक युग्म की प्रथम संख्या से द्वितीय संख्या को घटाइए।

8-5 *को संख्या रेखा पर निम्नांकित रूप में प्रदर्शित करते हैं :-*

इसी प्रकार अन्य युग्म की संख्याओं के घटाने को संख्या रेखा पर प्रदर्शित कीजिए।

यहाँ हम देखते हैं कि

8 – 5=3 (*पूर्ण संख्या है*)

5 – 9=? (*पूर्ण संख्या नहीं*)

10 – 0=10 (*पूर्ण संख्या है*)

0 – 7= ? (*पूर्ण संख्या नहीं*)

8 – 8= 0(*पूर्ण संख्या है*))

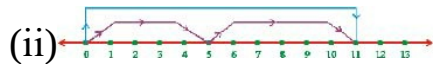
हम पाते हैं कि यदि पूर्ण संख्या के युग्म में छोटी संख्या से बड़ी संख्या घटाई जाय तो पूर्ण संख्या नहीं मिलती।

अत: घटाने की संक्रिया पूर्ण संख्याओं के लिए संवरक नहीं है।

***अभ्यास* 2 (b)**

1. *संख्या रेखा पर अंकित योग तथ्यों को लिखिए* :

(i)

(ii) 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

2. *निम्नांकित तथ्यों को संख्या रेखा पर दिखाइए* :

(i) 5 + 4 =9 (ii) 0 + 5 =5 (iii) 2 + 3 + 4 =9

3. *निम्नांकित कथनों में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए* :

(i) 345 + 789 = ☐ + 345

(ii) 2889 + 0 = ☐

(iii) (234 + 456) + 789 = ☐ + (456 + 789)

4. *पूर्ण संख्याओं के लिए घटाने की संक्रिया क्रम-विनिमेय नहीं है। तीन विभिन्न युग्म लेकर इसकी जाँच कीजिए।*

2.5.3. पूर्ण संख्याओं में गुणा के प्रगुण

(i) गुणन का संवरक प्रगुण

पूर्ण संख्याओं के युग्म लीजिए जैसे (0,8) (5,3) (7,13) और (6,5)और यु ग्म की संख्याओं को परस्पर गुणा करने पर देखते हैं कि प्रत्येक दशा में गुणनफल एक पूर्ण संख्या है।

अत: पूर्ण संख्याएँ गुणा के संवरक नियम का पालन करती हैं।

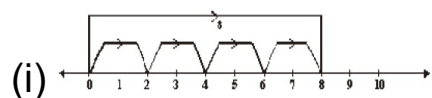
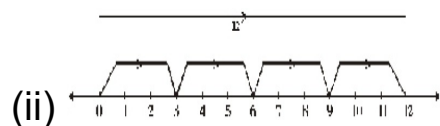
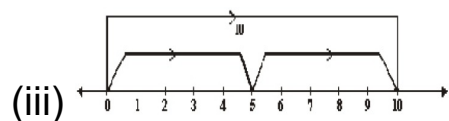
इसे निम्नांकित संख्या रेखाओं द्वारा समझ सकते हैं।

(i)

2 ×4 = 8 पूर्ण संख्या है।

(ii)

3 × 4 = 12 पूर्ण संख्या है।

(iii)

5 ×2 = 10 पूर्ण संख्या है।

प्रयास कीजिए :

संख्या रेखा पर पूर्ण संख्याओं के जोड़े जैसे 6, 4; 5, 8 और 3,10 में से प्रत्येक के गुणनफल प्राप्त कीजिए और जाँच कीजिए कि क्या गुणनफल एक पूर्ण संख्या है।

निष्कर्ष :

पूर्ण संख्याओं का गुणनफल सदैव पूर्ण संख्या होता है । यह गुणन संक्रिया का संवरक प्रगुण है ।

(ii) *गुणा का क्रम-विनिमेय प्रगुण*

पूर्ण संख्याओं के कुछ जोड़े (3, 5), (2, 7) *और*(9,13) *लीजिए। पहली संख्या का दूसरी संख्या से तथा दूसरी संख्या का पहली संख्या से प्राप्त गुणनफल की तुलना कीजिए।*

पूर्ण संख्या युग्म में उनके क्रम को बदल देने पर भी गुणनफल समान होता है।

यथा 3 ×5 =15

5×3=15

निष्कर्ष **:**

पूर्ण संख्या युग्म में उनके कम को बदल देने पर भी गुणनफल समान होता है। इसे गुणन संक्रिया का क्रम-विनिमेय प्रगुण कहते हैं

प्रयास कीजिए **:**

संख्या युग्म 2,3; 12,5; 6,4 *और* 0,7 *द्वारा गुणा के क्रम-विनिमेय प्रगुण की पुष्टि कीजिए।*

(iii) *शून्य का गुणन प्रगुण* **:**

निम्नांकित गुणन संक्रिया सारणी में रिक्त स्थानों को भरिए -

0 × 0 = 0

$0 \times 2 = \square = 2 \times 0$

$3 \times 0 = \square = 0 \times 3$

प्रयास कीजिए :

कुछ पूर्ण संख्याएँ स्वयं लेकर उन्हें 0 *से गुणाकर गुणनफल का अवलोकन कीजिए।*
क्या प्रत्येक बार गुणनफल शून्य प्राप्त होता है ?

निष्कर्ष :

किसी पूर्ण संख्या और शून्य का गुणनफल "शून्य" होता है।

(iv) ***गुणन का तत्समक अवयव*** **(Multiplicative Identity)**

निम्नांकित गुणन संक्रिया सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

$1 \times 0 = 0 \times 1 = \square$

$1 \times 1 = \square$

$1 \times 2 = 2 \times 1 = \square$

$1 \times 3 = 3 \times 1 = \square$

प्रयास कीजिए :

कुछ और पूर्ण संख्याएँ जैसे 5, 8, 17, 31 *आदि लेकर उन्हें* 1 *से गुणा कीजिए।*

प्रत्येक बार आप देखेंगे कि गुणनफल वही संख्या है जिसमें आप 1 *से गुणा करते हैं।*

निष्कर्ष :

किसी पूर्ण संख्या और '1' का गुणनफल वही संख्या आती है। '1' को

गुणन का तत्समक अवयव कहते हैं।

(v) गुणन का साहचर्य प्रगुण

किन्हीं तीन पूर्ण संख्याओं को लीजिए, जैसे 3,8और 5 सर्वप्रथम पहली संख्या का दूसरी संख्या से गुणा कीजिए और गुणनफल का पुनः तीसरी संख्या से गुणा करें। तीनों का परिणामी गुणनफल लिखिए, फिर दूसरी संख्या और तीसरी संख्या के गुणनफल से पहली संख्या में गुणा करने के बाद परिणामी गुणनफल लिखिए।

हम देखते हैं कि दोनों स्थितियों में तीनों संख्याओं का गुणनफल समान है।

इसी प्रकार तीन अन्य पूर्ण संख्याओं को लेकर जाँच कीजिए-

निष्कर्ष

किन्हीं तीन पूर्ण संख्याओं के सतत् गुणन संक्रिया में संख्याओं के क्रम को परिवर्तित करने पर गुणनफल अपरिवर्तित रहता है। अतः गुणन की संक्रिया पूर्ण संख्याओं में साहचर्य है।

प्रयास कीजिए :

पूर्ण संख्याएँ 6, 9 और 11 लेकर गुणा के साहचर्य नियम की पुष्टि कीजिए।

(vi) गुणन संक्रिया का योग पर वितरण

पूर्ण संख्याएँ 3, 6 और 8 को लीजिए और दिखाइये कि पहली संख्या से दूसरी तथा तीसरी संख्या के योग का गुणनफल, पहली संख्या का दूसरी संख्या से और पहली संख्या का तीसरी संख्या से गुणनफल के योग के बराबर है।

इसी प्रकार तीन अन्य पूर्ण संख्याओं को लेकर-जाँच कीजिए-

निष्कर्ष :

किन्हीं तीन पूर्ण संख्याओं के लिए- पहली सं. × (दूसरी सं.+ तीसरी सं.)=पहली सं. × दूसरी सं. + पहली सं. × तीसरी सं.

इसे गुणनसंक्रिया का योग पर वितरण प्रगुण कहते हैं।

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित कथनों की सत्यता का परीक्षण कीजिए :

(i) $9 \times (8 + 4) = (9 \times 8) + (9 \times 4)$

(ii) $6 \times (10 + 7) = (6 \times 10) + (6 \times 7)$

(iii) $11 \times (12 + 8) = (11 \times 12) + (11 \times 8)$

(vii) **गुणन का घटाने पर वितरण**

पूर्ण संख्या 4,8 **और** 5 **को लीजिए और दिखाइए कि**

पहली संख्या ×(दूसरी संख्या – तीसरी संख्या) =पहली संख्या×दूसरी संख्या – पहली संख्या×तीसरी संख्या

अतः गुणन का घटाने पर वितरण नियम लागू है।

अभ्यास 2 (c)

1. **अपनी अभ्यास पुस्तिका में गुणन-संक्रिया के प्रगुणों के आधार पर निम्नांकित कथनों में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।**

(i) $468 \times 0 = \square$

(ii) $8976 \times 5432 = 5432 \times \square$

(iii) $8973 \times 1 = \square$

2. **निम्नलिखित का गुणनफल यो॥य प्रगुणों का प्रयोग करके ज्ञात कीजिए।**

(i) 4 × 2834 × 25

(ii) 5 × 658 × 80

(iii) 25 × 4837 × 40

3.वितरण प्रगुण का प्रयोग करके निम्नांकित में से प्रत्येक का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) 487 × 1008

(ii) 998 × 436

(iii) 6754 × 94

(iv) 26478 × 106

2.2.4. पूर्ण संख्याओं में भाग की संक्रिया

भाग संक्रिया, गुणन संक्रिया की विलोम होती है, जैसे 4 x 5 = 20 तो 20 ÷ 4 = 5 या 20 ÷ 5 = 4 । अब भाग संक्रिया के प्रगुणों पर विचार करें।

(i) भाग की संक्रिया में संवरक प्रगुण का परीक्षण

पूर्ण संख्याओं के जोड़े लीजिए जैसे 24,6; 17,4; 7,8; 0,5 एवं 9,9

प्रत्येक जोड़े की प्रथम संख्या में दूसरी से भाग दीजिए।

हम देखते हैं कि प्रत्येक दशा में प्रथम पूर्ण संख्या में दूसरी पूर्ण संख्या से भाग देने पर पूर्ण संख्या नहीं प्राप्त होती हैं।

विभाजन की संक्रिया पूर्ण संख्याओं के लिये संवरक नहीं हैं।

(ii) शून्य से पूर्ण संख्याओं में भाग का परीक्षण

घटाने की विधि से पूर्ण संख्या 8 में "0" से भाग का परीक्षण करें तो

8

-0

8 *एक बार घटाने पर*

-0

8 *दो बार घटाने पर*

-0

8 *तीन बार घटाने पर*

इस प्रकार हम देखते हैं कि 8 में से 0 चाहे जितनी बार घटाएं, हमें शेषफल '0 कभी नहीं मिलेगा।

अत :

किसी पूर्ण संख्या में शून्य से भाग परिभाषित नहीं है।

(iii) पूर्ण संख्याओं में '1' से भाग का परीक्षण

निम्नांकित भाग की संक्रियाएं देखिए।

$2 \div 1 = 2$

$3 \div 1 = 3$

4 ÷ 1 = 4

किसी पूर्ण संख्या में '1' से भाग देने पर भागफल वही संख्या प्राप्त होती है।

(iv) शून्य में किसी शून्येतर पूर्ण संख्या से भाग का परीक्षण

हम देखते हैं कि

0 ÷ 5 = 0

0 ÷ 6 = 0

शून्य में किसी शून्येतर पूर्ण संख्या से भाग देने पर भागफल शून्य प्राप्त होता है

(v) किसी शून्येतर पूर्ण संख्या में उसी शून्येतर पूर्ण संख्या से भाग का परीक्षण

हम देखते हैं कि

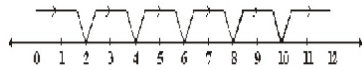
2 ÷ 2 = 1

3 ÷ 3 = 1

4 ÷ 4 = 1

किसी शून्येतर पूर्ण संख्या में उसी पूर्ण संख्या से भाग देने पर भागफल 1 आता है।

अभ्यास 2 (d)

1.संख्या रेखा द्वारा विभाजन तथ्यों को बताइए

2. $21 \div 3 = 7$ के संगत गुणात्मक तथ्य $3 \times 7 = 21$ है।

अत निम्नांकित तथ्यों के संगत गुणात्मक तथ्य बताइए।

(i) $56 \div 8 = 7$

(ii) $66 \div 11 = 6$

3. 117 को दो संख्याओं के गुणा के रूप में व्यक्त कीजिए जिसकी एक संख्या 13 है।

4.क्या ऐसी कोई पूर्ण संख्या सम्भव है जिसको स्वयं से विभाजित करने पर वही संख्या प्राप्त होती है।

5.क्या दो विभिन्न शून्येतर पूर्ण संख्याओं के लिए पहली संख्या को दूसरी संख्या से विभाजित करने पर तथा दूसरी संख्या को पहली संख्या से विभाजित करने पर समान भागफल प्राप्त होता है?

राष्ट्रीय आय एवं योग्यता आधारित छात्रवृत्ति परीक्षा प्रश्न

1. 80 और 90 के बीच अभाज्य संख्या है (वर्ष 2005)

(क) 81 और 83 (ख) 83 और 87

(ग) 81 और 89 (घ) 83 और 89 (उ. घ)

2.इस प्रश्न में पाँच पद हैं। चार पद किसी न किसी रूप में एक से हैं, और एक पद अन्य चारों से भिन्न है। अन्य से भिन्न पद की संख्या को उत्तर पत्र पर संगत प्रश्न के सम्मुख वृत्त से घेरिए

(*क*) 6,3,18 (*ख*)7,5,35

(*ग*) 9,3,27 (*घ*) 5,4,26

(*च*) 8,7,56 (*उ. घ*)

3 *दिये गये पाँच विकल्पों में से लुप्त पद को ज्ञात कीजिए तथा उसकी संख्या को सही प्रश्न संख्या के सामने उत्तर पत्रक पर लिखिए*।

196, 169, 144, 121, 100, ?

(*क*) 85 (*ख*) 90

(*ग*) 81 (*घ*) 64

(*च*) 95 (*उ. ग*)

इस इकाई में हमने सीखा:

1. *यदि दो पूर्ण संख्याओं को जोड़ा जाता है, तो योगफल सदैव पूर्ण संख्या होता है*। *पूर्ण संख्याओं में यह योग का संवरक प्रगुण है*।

2. *दो पूर्ण संख्याओं के योग पर संख्याओं के क्रम का कोई प्रभाव नहीं पड़ता*। *यह पूर्ण संख्याओं में योग का क्रम-विनिमेय प्रगुण है*।

3. *किसी पूर्ण संख्या में* 0 *जोड़ने पर योगफल वही संख्या होती है*। *अतएव* '0' *को पूर्ण संख्याओं में योग का तत्समक अवयव कहते हैं*।

4. *तीन पूर्ण संख्याओं को जोड़ते समय किन्हीं दो का समूह पहले बना लेने से योगफल में कोई अन्तर नहीं पड़ता*। *पूर्ण संख्याओं में यह योग संक्रिया का साहचर्य प्रगुण है*।

5. *पूर्ण संख्याओं में घटाने की संक्रिया संवरक नहीं है*।

6. *दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल सदैव पूर्ण संख्या होता है*। *यह पूर्ण संख्याओं में*

गुणन संक्रिया का संवरक प्रगुण है।

7. *दो पूर्ण संख्याओं का आपस में गुणा करने में क्रम का कोई प्रभाव नहीं पड़ता। पूर्ण संख्याओं में यह गुणन संक्रिया का क्रम विनिमेय प्रगुण है।*

8. *किसी पूर्ण संख्या और शून्य का गुणनफल सदैव "शून्य" होता है। यह शून्य का गुणन प्रगुण है।*

9. *पूर्ण संख्याओं में* '1' *से गुणा करने पर गुणनफल वही संख्या आती है। अतएव* 1 *को पूर्ण संख्याओं में गुणन का तत्समक अवयव कहते हैं।*

10. *किन्हीं तीन पूर्ण संख्याओं के सतत् गुणन संक्रिया में संख्याओं के क्रम परिवर्तित कर देने पर गुणनफल अपरिवर्तित रहता है। पूर्ण संख्याओं में यह गुणन संक्रिया का साहचर्य प्रगुण है।*

11. *पूर्ण संख्याओं में गुणन संक्रिया योग और घटाना दोनों संक्रियाओं पर वितरित होती है।*

12. *विभाजन की संक्रिया पूर्ण संख्याओं के लिए संवरक नहीं है।*

13. *किसी पूर्ण संख्या में शून्य से भाग परिभाषित नहीं है।*

14. *किसी पूर्ण संख्या में* "1" *से भाग देने पर भागफल वही संख्या प्राप्त होती है।*

15. *शून्य को किसी शून्येतर संख्या से भाग देने पर भागफल सदैव शून्य आता है।*

16. *किसी शून्येतर पूर्ण संख्या में उसी शून्येतर पूर्ण संख्या से भाग देने पर भागफल सदैव* "1" *आता है।*

उत्तरमाला

***अभ्यास* 2 (a)**

1. 0 ; **2.** 0 1 2 3 4 5 6 7

3. 13, 14, 15 **4.** 38,39,40 **5.**0

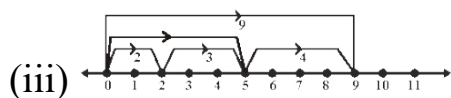
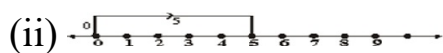
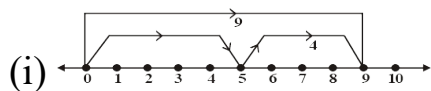
***अभ्यास* 2 (b)**

1. (i) 4 + 5 = 9, (ii) 5 + 6 =11

2.

(i)

(ii)

(iii)

3. (i) 789, (ii) 2889, (iii) 234

अभ्यास 2 (c)

1. (i) 0, (ii) 8976, (iii) 8973 **2.** (i) 283400, (ii) 263200, (iii) 4837000;3. (i) 490896, (ii)435128 (iii) 634876 (iv) 2806668.

*अभ्यास*2 (d)

1. 12÷ 2 = 6; 2. (i) 8 × 7 =56, (ii) 11 × 6 =66; 3.117 = 13 × 9; 4. *हाँ, वह संख्या* 1*है*।, 5. *नहीं*।

इकाई 3 पूर्णांक

- पूर्णांक की संकल्पना
- पूर्णांकों का निरपेक्ष मान
- पूर्णांकों की मूल संक्रियाओं के प्रगुण
- कोष्ठकों का प्रयोग एवं प्रकार
- संख्या रेखा पर पूर्णांक का निरूपण
- BODMAS नियम

3.1 भूमिका

आपने प्राकृतिक संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ तथा इन संख्याओं का योग, घटाना, गुणा और भाग की संक्रियाओं के नियम सीख लिए हैं। छोटी पूर्ण संख्याओं से बड़ी पूर्ण संख्याओं को घटाने की आवश्यकता पड़ने के कारण पूर्ण संख्याओं का विस्तार किया गया। इसके लिए प्राकृतिक संख्याओं1,2,3. . . के संगत -1,-2,-3. . . नयी संख्याएँ बन गयीं। इस प्रकार पूर्ण संख्याओं का विस्तारित सांरह पूर्णांकों का संग्रह कहलाया। इस इकाई में पूर्णांकों के बारे में विस्तार से जानेंगे।

3.2 पूर्णांकों की आवश्यकता

मोहन एक कलम खरीदने बाजार जाता है। वहाँ अपनी एक परिचित दुकान पर वह रू12 की एक कलम पसन्द करता है किन्तु उसके पास उस समय केवल रू10 ही है। वह दुकानदार को बताता है कि अभी वह यह कलम खरीद नहीं सकता क्योंकि उसके पास कलम के मूल्य के बराबर रुपये नहीं हैं। दुकानदार मोहन को कलम देते हुए कहता है कि जितने रुपये आपके पास हैं, उतने अभी दे दीजिए और बाकी रुपये

बाद में दे दीजिएगा। मोहन प्रसन्नचित्त वह कलम ले लेता है और दुकानदार को रू10 दे देता है । बताइए, अभी दुकानदार को कितने रुपये और देने पड़ेंगे ? स्पष्टत: मोहन को अभी दुकानदार को रू2 और देने पड़ेंगे। दुकानदार इन रू2 को मोहन के नाम अपनी डायरी में उधार के रूप में लिख लेगा और जब वह दुकानदार को उधार के रू2 लौटा देगा तो वह अपनी डायरी में मोहन के नाम यह उधार काट देगा।ध्यान दीजिए, दैनिक जीवन में इस तरह की घटनाएँ प्राय: होती रहती हैं। इस उधार की राशि रू2 को किस चिह्न के साथ अंकित करते हैं ? हम केवल रुपयों की उधारी ही नहीं करते, बल्कि कभी-कभी वस्तुओं के रुप में भी उधार लेना पड़ता है । किसान खेतों में बीज बोते समय भी कभी-कभी अपने किसी पड़ोसी अथवा गाँव के व्यक्ति से, जो बीजों को बोने के लिए किसानों को देता है, उधार लेता है और फसल पकने पर उसे लौटाता है । व्यापार में व्यापारी को कभी लाभ होता है तो कभी हानि भी होती है। ऊँचे-ऊँचे आधुनिक बने भवनों में भूतल के ऊपर तो मंजिले होती ही हैं, भूतल के नीचे भी तल बने होते हैं। अत: भूतल से ऊपर और नीचे दोनों ओर ही सीढ़ियाँ बनी होती हैं। यदि भूतल से कोई व्यक्ति नीचे की ओर 5 सीढ़ियाँ उतरता है तो इसे किस प्रकार अंकित करेंगे ?

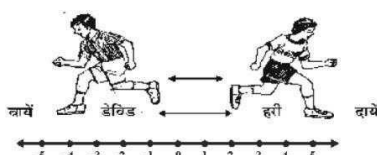
*गणितज्ञों ने उपुर्यक्त उदाहरणों में स्पष्टता के लिए उधार ली गयी राशि, भूतल से नीचे उतरी सीढ़ियों की संख्या इत्यादि के साथ चिह्न '-', जिसे ऋण पढ़ते हैं, लगाने की संकल्पना की है ।ध्यान दीजिए विपरीत स्थितियों, जैसे लाभ - हानि, आय-व्यय, **0**^{0}C से ऊपर और **0**^{0}C से नीचे के तापमान, संख्या रेखा पर 0 से दायीं ओर और 0 से बायीं ओर चली गयी दूरियों के मात्रक आदि, में यदि लाभ, आय,0° से ऊपर का तापमान और संख्या रेखा पर 0 से दायीं ओर चली गयी दूरी के मात्रक '+ ' चिह्न से युक्त कर लिखते हैं तो वहीं हानि, व्यय, '-' से नीचे का तापमान और संख्या रेखा पर 0 से बायीं ओर चली गयी दूरी के मात्रक को '-' चिह्न से युक्त कर लिखते हैं ।*

पूर्णांक

हमने पूर्ण संख्याओं के विषय में अध्ययन करते समय देखा कि पूर्ण संख्याओं पर

घटाने की संक्रिया में संवरक नियम लागू नहीं होता है, क्योंकि पूर्ण संख्याओं में (–) *से युक्त संख्याओं का कोई स्थान नहीं है। परन्तु व्यावहारिक जगत में यह देखा जा रहा है कि* (–) *से युक्त संख्याएँ भी पूर्ण संख्याओं की तरह महत्वपूर्ण हैं। आइए हम इसे उदाहरण द्वारा समझें।*

विपरीतता **(Oppositeness)**

निम्नांकित चित्र देखिए

एक खेल में हरी और डेविड में से प्रत्येक 0 *से दौड़ना आरम्भ करते हैं। हरी जितने कदम दाहिने जाता है, डेविड उतने ही कदम बायें जाता है। इस प्रकार हरी यदि* 5 *कदम दाहिने जाता है, तो डेविड* 5 *कदम बायें जाता है।*

0 *से* 5 *कदम दाहिने और* 5 *कदम बायें के विस्थापन विपरीतता के बोधक हैं।* 0 *से दाहिने ओर की दिशा को धनात्मक* (+) *तथा बायीं ओर की दिशा को ऋणात्मक* (-) *चिह्नों से व्यक्त करते हैं। इस प्रकार हरी की स्थिति* =+ 5 *से तथा डेविड की स्थिति*= -5 *से प्रदर्शित की जायेगी।*

प्रयास कीजिए **:**

निम्नांकित स्थितियों को चिह्न सहित बताइए।

(*क*) 0 *से* 8 *कदम बायें।*

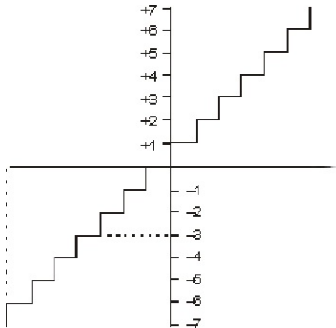
(*ख*) 0 *से* 7 *कदम दाँये।*

(*ग*) 0 *से* 11 *कदम दाँये।*

(घ) 0 से 6 कदम बायें।

2. मजीद के घर में छत पर चढ़ने के लिए तथा तहखाने में उतरने के लिए सीढ़ियां बनी हैं।

सीढ़ियों का चित्र देखिए स्पष्ट है कि भूतल से ऊपर की दूरियाँ धनात्मक तथा भूतल के नीचे की दूरियाँ ऋणात्मक दर्शायी गयी हैं।

प्रयास कीजिए :

हम भूतल से किधर और कितनी दूरी पर होंगे
(क) भूतल से 4 सीढ़ियाँ ऊपर चढ़ने के बाद ?
(ख) भूतल से 3 सीढ़ियाँ नीचे उतरने के बाद ?

(ग) भूतल से 5 सीढ़ियाँ ऊपर चढ़कर पुन 2 सीढ़ियाँ और चढ़ने के बाद ?

(घ) भूतल से 3 सीढ़ियाँ उतरने और वहाँ से पुन 4 सीढ़ियाँ उतरने के बाद ?

(च) भूतल से 4 सीढ़ियाँ उतरने और पुनवहाँ से 15 सीढ़ियाँ चढ़ने के बाद ?

(छ) भूतल से 5 सीढ़ियाँ उतरने और वहाँ से पुन 3 सीढ़ियाँ उतरने के बाद ?

भूतल से ऊपर की स्थिति को धनात्मक (+) तथा उससे नीचे की स्थिति को ऋणात्मक (-) चिह्न से व्यक्त करते हैं। इस प्रकार उपर्युक्त क्रियाओं में से

प्रथम क्रिया करने पर स्थिति=4 सीढ़ियाँ ऊपर=+ 4

दूसरी क्रिया के बाद की स्थिति =भूतल से 3 सीढ़ियाँ नीचे = - 3

अन्य क्रियाओं के बाद की स्थिति बताइए

(क) + 4 (ख) -3

(ग) ---- (घ)-----

(च) ---- (छ)-----

विचार कीजिए :

राम प्रसाद दुकानदार की किसी दिन की बिक्री से लाभ और हानि निम्नांकित तालिका में प्रदर्शित है

बिक्री की वस्तु	लाभ	हानि
1.सरसों का तेल	₹350.0	—
2.मूंगफली का तेल	—	₹120.00
3.काली मिर्च	₹225.00	—
4.हल्दी	₹225.00	—
5.आटा	—	₹425.00
6.चावल	₹321.00	—

राम प्रसाद के लेखा-जोखा में भी लाभ और हानि विपरीत स्थितियों का बोध कराते हैं। लाभ को धनात्मक तथा हानि को ऋणात्मक चिह्न से व्यक्त कर सकते हैं।

इस प्रकार यदि सरसों के तेल की बिक्री से रुपयों में लाभ= + 350, तो मूँगफली के तेल की बिक्री से रुपयों में हानि=-120 या लाभ = 120

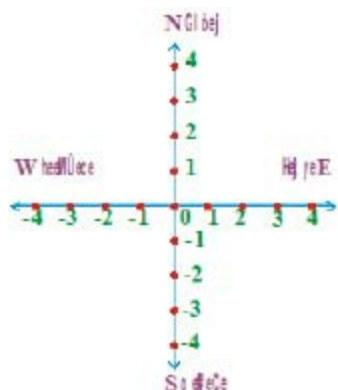
उपर्युक्त तालिका में दिये गये अन्य वस्तुओं के बिक्री के लाभ और हानि संगत चिह्न द्वारा व्यक्त कीजिए।

ध्यान दीजिए

निम्नांकित तालिका में देश के पाँच स्थानों के किसी समय के ताप क्रम अंकित है

स्थान	तापक्रम
सियाचीन	0° से 10° सेल्सियस नीचे।
इलाहाबाद	0° से 30° सेल्सियस ऊपर।
शिमला	0° से 10° सेल्सियस ऊपर।
दिल्ली	0° से 35° सेल्सियस ऊपर।
श्रीनगर	0° से 5° सेल्सियस नीचे।

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि तापमापी यन्त्र भी दो विपरीत दिशाओं में मापन करता है। 0^0 *से ऊपर के तापक्रम को धनात्मक* (+) *तथा* 0^0 *से नीचे के तापक्रम को ऋणात्मक* (-) *के रूप में व्यक्त कर सकते हैं यथा* -

सियाचिन, प्रयागराज, शिमला, दिल्ली, श्रीनगर

पाश्र्काकित चित्र देखिए
पूर्व और पश्चिम विपरीत दिशाएं हैं।

उत्तर और दक्षिण भी विपरीत दिशाएं हैं।

4 *मात्रक पूर्व का विपरीत* 4 *मात्रक पश्चिम है। निम्नांकित के विपरीत क्या हैं*

(*क*) 3 *मात्रक पूर्व* (*ख*) 8 *मात्रक पश्चिम* (*ग*) 5 *मात्रक पूर्व*

(घ) 2 *मात्रक दक्षिण* (च) 7 *मात्रक उत्तर* (छ) 9 *मात्रक दक्षिण*

(I) O *से पूर्व की स्थिति को धनात्मक* (+) *लेते हुए उपर्युक्त प्रश्न के* (*क*), (*ख*) *और* (*ग*) *की स्थिति को चिह्न सहित लिखिए।*

(II) O *से उत्तर की स्थिति को धनात्मक लेते हुए उपर्युक्त के खण्डों* (घ), (च) *और* (छ) *की स्थिति को चिह्न सहित लिखिए।*

पूर्णसंख्या के संग्रह को आवश्यकतानुसार विस्तारित करने के लिए इस संग्रह में हम कुछ नयी संख्याओं को सम्मिलित करते हैं। इसके लिए प्राकृतिक संख्याओं 1, 2, 3, 4, ..., *के संगत हम इन संख्याओं को निम्नांकित ढंग से बनाते हैं*

1 *के संगत* -1 (*ऋण* 1) *इस प्रकार बनाते हैं कि* : 1 + (-1) =0

1 *और* -1 *परस्पर विपरीत हैं*। 2 *के संगत* -2 (*ऋण*2) *इस प्रकार बनाते हैं कि* 2+(-2)=0

2 *और* -2 *परस्पर विपरीत हैं*। 2 *के संगत* -2 (*ऋण* 2) *इस प्रकार बनाते हैं कि* 3 + (-3)=0

इन नयी संख्याओं - 1, -2, -3, ... *को ऋणपूर्णांक कहते हैं*।

3 *और* -3 *परस्पर विपरीत हैं, आदि*। *इस प्रकार प्राकृतिक संख्याओं, ऋण पूर्णांको और शून्य सहित संख्याओं का नया संग्रह निम्नांकित हैं*,

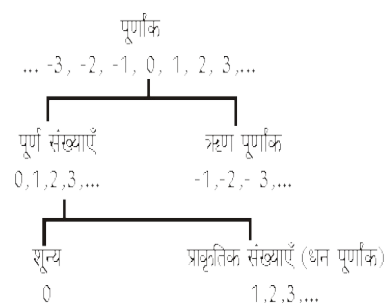
0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...

इन्हें हम निम्नांकित प्रकार से भी लिखते हैं

..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

इन सभी संख्याओं को पूर्णांक(**Integers**) *कहते हैं*।

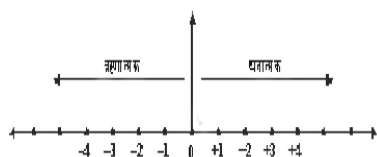
1, 2, 3, ... *अर्थात् प्राकृतिक संख्याएँ, धन पूर्णांक और* -1, -2, -3, ... *ऋण पूर्णांक होते हैं*। *शून्य मात्र एक ऐसा पूर्णांक हैं जो न तो धनात्मक है और न ऋणात्मक*। *धन पूर्णांकों को* + 1, + 2, + 3 ... *के रूप में भी लिखते हैं*। *प्राय: इनके पूर्व धन चिह्न को नहीं लिखा जाता है*। *अत: संख्याएँ* 1, 2, 3, ... *धन पूर्णांक हैं*।

पूर्णांकों, पूर्ण संख्याओं तथा प्राकृतिक संख्याओं को निम्नांकित चित्र से समझा जा सकता है।

3.3 संख्या-रेखा पर पूर्णांकों का निरूपण

•एक संख्या-रेखा खींचिए।

लगभग बीच में बिन्दु 0 लेकर इसके दोनों ओर परस्पर समान दूरी पर बहुत से बिन्दु अंकित कीजिए।

0 द्वारा शून्य निरूपित करके इसके दायीं ओर के क्रमागत बिन्दुओं द्वारा क्रमश: + 1, + 2, + 3, ... निरूपित कीजिए। इसके विपरीत 0 से बायीं ओर के क्रमागत बिन्दुओं द्वारा क्रमश: -1, -2, -3 ... निरूपित कीजिए।

इस प्रकार सभी पूर्णांक संख्या-रेखा पर निरूपित हैं। यथा,

विपरीत संख्याओं का संयोग

- खेल के मैदान में एक रेखा पूर्व-पश्चिम दिशा में रस्सी और चूने की सहायता से खींचिए। लगभग मध्य में स्थित एक बिन्दु से दोनों ओर, परस्पर 1 मीटर की दूरी पर बहुत से बिन्दु चूने, रस्सी और फीते की सहायता से बनाइए। लगभग मध्य में अंकित बिन्दु द्वारा शून्य निरूपित करके अन्य बिन्दुओं द्वारा पूर्णांको को निरूपित कीजिए।

शून्य से 5 मीटर पूर्व जाकर + 5 पर पहुँचिए। + 5 से 5 मीटर पश्चिम जाकर हम कहाँ पहुँचते हैं?

शून्य से 5 मीटर पूर्व की ओर का विस्थापन= + 5

5 मीटर पश्चिम की ओर का विस्थापन= -5

इस प्रकार + 5 *और* -5 *के दोनों विस्थापनों का संयुक्त परिणाम क्या है*

(+ 5) + (-5) = 0

इसी प्रकार शून्य से 5 *मीटर पश्चिम की ओर जाकर* -5 *विस्थापन प्राप्त करें, पुन: वहाँ से* 5 *मीटर पूर्व की ओर आकर* + 5 *विस्थापन प्राप्त करें*।

दोनों विस्थापनों का संयुक्त परिणाम क्या है

(-5) + (+ 5) = 0

इस प्रकार हम देखते हैं कि

+ 5 *और* -5 *परस्पर विपरीत ऐसे पूर्णांक हैं कि*

(+ 5) + (-5) = 0

इसी प्रकार -7 *और* + 7 *परस्पर विपरीत पूर्णांक हैं*।

प्रयास कीजिए **:**

1. ***निम्नांकित पूर्णांकों के विपरीत पूर्णांक बताइए***

-6, + 9, -11, + 12, -17

2.*मान बताइए*

(-11) + (+ 11), (+ 9) + (-9), (+ 13) + (-13)

निष्कर्ष **:**

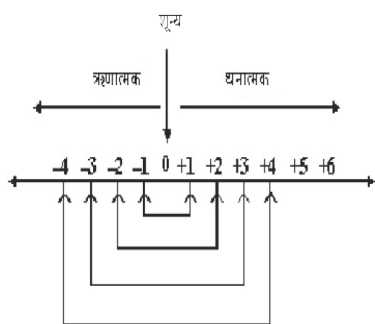
प्रत्येक धन पूर्णांक के संगत एक ऋण पूर्णांक होता है और इन दोनों का

योगफल 'शून्य' होता है।

हम देखते हैं कि संख्या-रेखा पर,

(i) धन पूर्णांक शून्य के दाहिनी ओर हैं।

(ii) ऋण पूर्णांक शून्य के बायीं ओर हैं।

संख्या रेखा पर विपरीत पूर्णांकों के जोड़े (युग्म)

आइए जानें

प्रत्येक धन पूर्णांक के संगत एक ऋण पूर्णांक होता है और इन दोनों का योगफल 'शून्य' होता है।

प्रत्येक धन पूर्णांक की संगतता एक ऐसे ऋण पूर्णांक से है, जिसकी शून्य से वही दूरी है जो धन पूर्णांक की शून्य से है, किन्तु विपरीत दिशाओं में है।

हम धन और ऋण पूर्णांकों के ऐसे जोड़े बना सकते हैं जो परस्पर विपरीत हैं। अतः हम इन जोड़ों को विपरीत दिशाओं में मापन हेतु प्रयोग कर सकते हैं। उदाहरणतः यदि -40, चालीस रुपये की हानि को व्यक्त करता है, तो + 40, चालीस रुपये के लाभ का परिचायक है।

संख्या रेखा पर विपरीत पूर्णांकों के जोड़े (युग्म)

पूर्णांक ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ... हैं।

संख्याएँ + 1, + 2, + 3, ... धन पूर्णांक हैं।

संख्याएँ -1, -2, -3, ... ऋण पूर्णांक हैं।

शून्य सहित सभी धन और ऋण पूर्णांक, पूर्णांक हैं।

योगात्मक प्रतिलोम

किसी पूर्णांक a ***के विपरीत*** -a ***को उसका योगात्मक प्रतिलोम भी कहते है।***

जैसे (+ 6) + (– 6) = 0

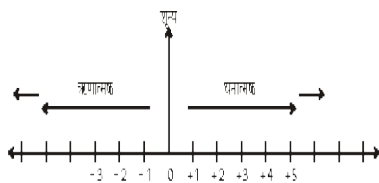
इसीलिये + 6 ***और*** – 6 ***परस्पर योगात्मक प्रतिलोम हैं।***

चूँकि 0 + 0 = 0 अत: शून्य का योगात्मक प्रतिलोम स्वयं शून्य ही हैं।

पूर्णांकों की तुलना

निम्नांकित पर विचार कीजिए :

शून्य से 50 ***सेल्सियस ऊपर के तापक्रम तथा*** 50 ***सेल्सियस नीचे के तापक्रम में कौन ऊँचा है***?

+ 5 ***और*** -5 ***पूर्णांकों में कौन बड़ा है***?

पूर्ण संख्याओं में हम जानते हैं कि दो पूर्ण संख्याओं में से संख्या रेखा पर दाहिनी ओर स्थित संख्या बड़ी होती है। *जैसे* 8> 6 *जिसके समानार्थी* 6 < 8 *यानी संख्या रेखा पर* 8 *दाहिने तथा* 6 *उसके बाएं हैं।*

यही नियम यथावत् पूर्णांकों की तुलना में भी प्रयुक्त होता है। अत: दो पूर्णांकों में जो संख्या रेखा पर दाहिने होती है वह अपने बायें के पूर्णांक से बड़ी होती है।

स्मरण रखिए

1.*प्रत्येक धन पूर्णांक समस्त ऋण पूर्णांकों से बड़ा होता है।*

2. *शून्य प्रत्येक धन पूर्णांक से छोटा होता है।*

3.*शून्य प्रत्येक ऋण पूर्णांक से बड़ा होता है।*

4. *बड़े पूर्णांक का योगात्मक प्रतिलोम छोटे पूर्णांक के योगात्मक प्रतिलोम से*

***छोटा होता है जैसे* 5 > 3 ⇒-5 < -3**

3.4. *पूर्णांकों का निरपेक्ष मान* (Absolute value)

संख्या रेखा खींचिए, इस पर पूर्णांकों को प्रदर्शित कीजिए। देखकर बताइए कि

- + 6 *शून्य से कितनी दूरी पर है?*
- - 6*की शून्य से दूरी कितनी है?*

उपर्युक्त दूरियों में क्या सम्बन्ध है?

दोनों दूरियों का परिमाण 6 *है, इस प्रकार*6 *को हम* + 6 *और* -6 *का निरपेक्ष मान कहेंगे।*

-6 *के निरपेक्ष मान को* |–6| *और*| +6| *के निरपेक्ष मान को* |+ 6| *लिखते हैं। इस*

प्रकार

$|-6| = 6 = |+6|$, $|-8| = 8 = |+8|$

$|-9| = 9 = |+9|$, $|0| = 0$

प्रयास कीजिए :

खाली जगह भरिए

$|+11| =$ ☐ , $|-13| =$ ☐

$|-47| =$ ☐ , $|12| =$ ☐

अभ्यास 3 (a)

निम्नांकित सारणियों में रिक्त स्थानों की पूर्ति के लिए सारणी के नीचे चार विकल्प दिये गये हैं। जिनमें से केवल एक ही सही है। सही विकल्प चुन कर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

1.

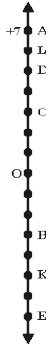
19	23	25	29	-29	-25	-23	-19
7	11	13	17	-17		-11	-7

(i) -25 **(ii)** -13 **(iii)** 13 **(iv)** -10

2.

-7	25	7	-25	-13	31	13	-31
5	-8	-5	8	11	-14	-11	

(i) -13 **(ii)** 17 **(iii)** 14 **(iv)** -17

3.***निम्नलिखित को पूर्णांक के रूप में लिखिए । पूर्व को धन दिशा तथा समुद्र तल से ऊँचाई को धन दिशा मानिए।***

(i) शून्य से नीचे 4^0 सेल्सियस का तापक्रम

(ii) 7 कदम पूर्व

(iii) रु 3.28 की हानि

(iv) 18 मी पश्चिम का विस्थापन

(v) समुद्र तल से 1,000 मीटर ऊँचाई

4.निम्नलिखित पूर्णांकों के योगात्मक प्रतिलोम लिखिए

(i) +9 (ii) –21 (iii) +39

(iv) –41 (v) +91

5.संख्या-रेखा खींचिए। उस पर निम्नांकित पूर्णांकों को प्रदर्शित कीजिए

(क) + 4 (ख) -9 (ग) + 7

(घ) -3 (ङ) -6

6. पूर्णांकों को ऊध्र्वाधर संख्या रेखा पर भी दिखा सकते हैं जिसपर ऊपर की दिशा को धनात्मक तथा नीचे की दिशा को ऋणात्मक माना जाता है। पाश्र्काकित संख्या रेखा देखिए और निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(क) A बिन्दु + 7 है। कौन सा बिन्दु -7 है

(ख) बिन्दु B किस पूर्णांक को निरूपित करता है

(ग) बिन्दुB का विपरीत बिन्दु बताइए।

(घ) बिन्दु D,K और L से निरूपित पूर्णांक लिखिए।

(ङ) बिन्दुओं D, K और L के विपरीतों को बताइए।

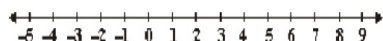
7.निम्नांकित के बीच के सभी पूर्णांक लिखिए।

(क) -2 और + 3 (ख) 0 और 6

(ग) -4और 4 (घ) -5 और + 2

(ङ) -3 और + 5 (च) -8 और 4

8. निम्नांकित संख्या-रेखा देखिए

-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

इसकी सहायता से निम्नांकित पूर्णांकों के जोड़े के बीच के पूर्णांकों को आरोही (बढ़ते हुए) क्रम में लिखिए

(क)2, 5 (ख) -4, 0 (ग) 8, 3 (घ) 0, 4 (ङ) -5, -2 (च) -1, 4

9. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए

(क) $|-13|$ (ख) $|12|$ (ग) $|-37|$

(घ) $|0|$ (ङ) $|-47|$ (च)$|101|$

10.अपनी अभ्यास पुस्तिका में सत्य या असत्य कथन की पहचान कर लिखिए :

(क)सबसे छोटा पूर्णांक शून्य है।

(ख) शून्य का विपरीत नहीं होता है।

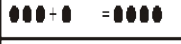
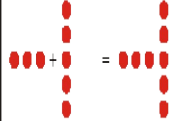
(ग) –17 > –5

(घ) एक धनात्मक पूर्णांक अपने योगात्मक प्रतिलोम से बड़ा होता है।

(ङ) एक ऋणात्मक पूर्णांक अपने योगात्मक प्रतिलोम से बड़ा होता है।

(च) शून्य एक पूर्णांक नहीं है।

3.5. पूर्णांकों पर संक्रियाएँ

दो विभिन्न रंगों जैसे लाल और काले रंगों की दफ्ती की वृत्ताकार बहुत सी चकतियाँ काटिए। लाल चकतियों से धन पूर्णांक और काली चकतियों से ऋण पूर्णांक समझिए। इस प्रकार लाल रंग की एक चकती से + 1 और काले रंग की एक चकती से -1का बोध होगा। एक लाल '●' और एक काले रंग की '●' चकती को युग्मित करके एक शून्य युग्म के रूप में समझ सकते हैं। अत: ●● युग्म शून्य है।

निम्नांकित चित्र में कुछ पूर्णांकों को रंगीन चकतियों द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

पूर्णांक	रंगीन चकतियों द्वारा निरूपण
4	●●●●
-3	●●●
5	●●●●●
शून्य (0)	●● या ●●

3.5.1 पूर्णांकों का योग :

(a) रंगीन चकतियों की सहायता से समान चिह्नों के पूर्णांकों को जोड़ना

निम्नांकित सारणी को देखिए :

(+2) + (+3)	●● + ●●● = ●●●●●	(+2) + (+3) = +5
(–3) + (–1)	●●● + ● = ●●●●	(–3) + (–1) = –4
(–4) + (–2)	●●●● + ●● = ●●●●●●	(–4) + (–2) = –6
(+3) + (+5)	●●● + ●●●●● = ●●●●●●●●	(+3) + (+5) = +8

हम देखते हैं कि दो धन पूर्णांकों का योगफल धन पूर्णांक और दो ऋण पूर्णांकों का योगफल ऋण पूर्णांक होता है।

प्रयास कीजिए :

1.*चकतियों की सहायता से निम्नांकित का मान ज्ञात कीजिए।*

(i) (–4) + (–5) (ii) (+6) + (+4)

(iii) (–11) + (–7)   (iv) (–2) + (–1)

(v) (+4) + (+2) (vi) (–3) + (–3)

2. *मान बताइए*

(i) (–2) + (–1) (ii) (–3) + 0

(iii) (+4) + (+5) (iv) (–5) + (–6)

(v) (–5) + (–2) (vi) (+6) + (+3)

(b)*आइए रंगीन चकतियों की सहायता से असमान चिह्नों के दो पूर्णांकों को जोड़ना सीखें*

इन्हें देखकर समझिए

(i) (–3) + (+ 4) = ***काले रंग की तीन चकतियाँ*** + ***लाल रंग की चार चकतियाँ***

तीन काली तथा तीन लाल चकतियों को युग्मित करने पर एक लाल रंग की चकती बचती है।

$(-3) + (+4) = (-3) + (+3) + (+1)$

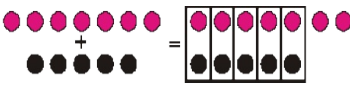
$= 0 + (+1)$

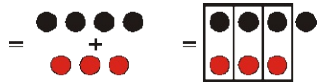
$= (+1)$

(ii) $(+5) + (-7)$ =***काले रंग की तीन चकतियाँ + लाल रंग की चार चकतियाँ***

दो काले रंग की चकतियाँ बचती हैं।

$= \boxed{(+5) + (-5)} + (-2)$

$= 0 + (-2)$

$= (-2)$

(iii) $(-4) + (+3) =$ ***चार काली चकतियाँ + तीन लाल चकतियाँ***

$= (-3) + (+3) + (-1)$

$= -1$

(iv) $(+7) + (-5)$

$= \boxed{(+5) + (-5)} + (+2)$

$= 0 + (+2)$

$= (+2)$

प्रयास कीजिए :

• ***मान बताइए***

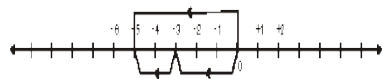
(***क***) (–12) + (+8)   (***ख***) (+7) + (–5)   (***ग***) (–12) + (+9)

(***घ***) (–27) + (+18)   (***ङ***) (+15) + (+13)   (***च***) (+31) + (–18)

(***छ***) (–19) + (+16)   (***ज***) (–8) + (+12)   (***झ***) (–16) + (+19)

(c) संख्या रेखा की सहायता से पूर्णांकों का जोड़ना

उदाहरण 1. संख्या रेखा की सहायता से (-3) + (-2) **का मान बताइए।**

हल :

शून्य से आरम्भ करके -3 **अर्थात्** 3 **इकाई बायीं ओर जाइए। वहाँ से** 2 **इकाई बायी ओर पुन: जाइए। कहाँ पहुँचते हैं?** **हम** -5 **पर पहुँचते हैं। अत:** (-3) + (-2) = -5

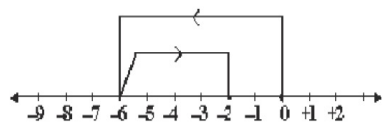
उदाहरण 2. (+ 6) + (+ 3) **का मान बताइए।**

हल: हम पूर्ण संख्याओं के योगफल ज्ञात करने में देख चुके हैं कि (+ 6) + (+ 3) = + 9

उपर्युक्त उदाहरणों से दो समान चिह्नों वाले पूर्णांकों के जोड़ने का नियम निम्नांकित प्राप्त होता है।

समान चिह्नों के दो पूर्णांकों के योगफल के लिए जोड़ी जाने वाली संख्याओं के निरपेक्ष मानों के योगफल के पूर्व वही चिह्न लगाते हैं, जो जोड़े जाने वाले पूर्णांकों का हैं।

(d) संख्या रेखा की सहायता से असमान चिह्नों के पूर्णांकों का जोड़ना

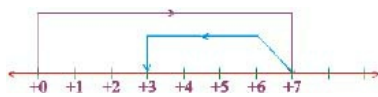
उदाहरण 3. (-6) + (+ 4) **का मान बताइए**

-6 **विस्थापन हेतु** 6 **इकाई शून्य से बायें जाइए। पुन: वहाँ से** + 4 **विस्थापन हेतु** 4 **इकाई दाहिने जाइए।**

कहाँ पहुँचते हैं शून्य से 2 इकाई बायें अर्थात् -2 पर पहुँचते हैं।

इस प्रकार

(-6) + (+ 4) = -2

उदाहरण 4. (+ 7) + (-4) का मान बताइए

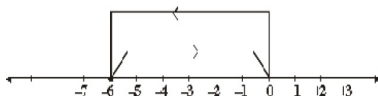
हल:

शून्य से + 7 विस्थापन हेतु 7 इकाई दाहिने जाइए। पुन: + 7 में (-4) जोड़ने के लिए वहाँ से 4इ काई बायें जाइए।

कहाँ पहुँचते हैं?

शून्य से3 इकाई दाहिने अर्थात् + 3 पर पहुँचते हैं।

इस प्रकार (+ 7) + (-4) = + 3

उदाहरण 5. (-6) + (+ 6) का मान बताइए

हल:

-6 विस्थापन के लिए शून्य से 6 इकाई बायें जाइए। इसमें + 6 जोड़ने के लिए वहाँ से 6 इकाई दाहिने जाइए।

कहाँ पहुँचते हैं?

शून्य पर वापस आ जाते हैं।

(-6) + (+ 6) = 0

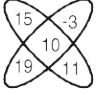
हम देखते हैं कि

1.दो धन पूर्णांकों का योगफल धन होता है । 2.दो ऋण पूर्णांकों का योगफल ऋण होता है । 3.असमान चिह्नों वाले दो पूर्णांकों का योगफल पूर्णांकों के निरपेक्ष मानों का अन्तर होता है तथा चिह्न, वही होता है जो परिमाण में बड़ी संख्या का होता है (अन्तर 0 होने पर कोई चिह्न नहीं होता है)

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित का मान संख्या रेखा पर प्रदर्शित कीजिए

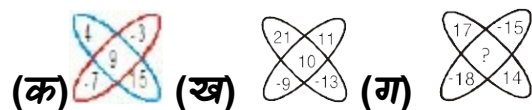
क.-5 + 7

ख. 5 + (-9)

ग. (-2) + (-6)

अभ्यास 3(b)

1. *निम्नांकित प्रश्नों* (1-2) *में केन्द्रीय खाने की संख्या उसके चारों ओर के पटलो पर अंकित संख्याओं से किसी प्रकार संबंधित है। प्रश्नचिह्न* (?) *वाली संख्या ज्ञात कीजिए*

(i) -2 (ii) 2 (iii) 3 (iv) -3

2. (क) 15, -3, 10, 19, 11 **(ख)** 10, 4, 8, 5, 7 **(ग)** 12, 5, ?, 8, 6

(i) -5 (ii) 5 (iii) 6 (iv) -6

3.अपनी अभ्यास पुस्तिका में खाली जगह भरिए

(क) दो पूर्णांकों का योगफल सदैव .... होता है।

(ख) दो धन पूर्णांकों का योगफल .... होता है।

(ग) दो ऋण पूर्णांकों का योगफल .... होता है।

4. सत्य अथवा असत्य बताइए।

(क) किसी पूर्णांक तथा इसके योगात्मक प्रतिलोम का योगफल शून्य होता है।

(ख) शून्य ऋण पूर्णांक है।

(ग) दो ऋणपूर्णांकों का योगफल धन पूर्णांक होता है।

(घ) किसी पूर्णांक और शून्य का योगफल उस पूर्णांक के बराबर होता है।

(च) एक ऋण और एक धन पूर्णांक का योगफल सदैव धन पूर्णांक होता है।

(छ) संख्या रेखा पर -18 और + 18, शून्य से समान दूरी पर हैं।

(ज) दो धन पूर्णांकों का योगफल सदैव धन पूर्णांक होता है।

3.5.2 पूर्णांकों पर योग-संक्रिया के प्रगुण

1.निम्नलिखित तालिका के खाली स्थानों को भरिए

किन्हीं दो पूर्णांकों का योग	योगफल का मान	योगफल पूर्णांक है अथवा नहीं
(-4) + (+6)	+2	पूर्णांक है ।
(+9) + (-8)		पूर्णांक है ।
(-12) + (+7)		
(+14) + (+3)		

उपर्युक्त सारणी से स्पष्ट है कि दो पूर्णांकों का योगफल सदैव पूर्णांक होता है।

अतः पूर्णांकों में योग-संक्रिया संवरक है।

2.***कोई दो पूर्णांक*** -7 ***तथा*** + 4 ***लें।***

(-7) + (+ 4) = -3 ***और*** (+ 4) + (-7) = -3

इसी प्रकार पूर्णांकों के अन्य जोड़े यथा -6 ***और*** 0, ***तथा*** + 8 ***और*** -11 ***लें।***

यहाँ -6 + 0 =-6 ***और*** 0 + (-6) =-6

तथा (+ 8) + (-11) =-3 ***और*** (-11) + (+ 8) =-3

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि

किसी भी क्रम में दो पूर्णांकों का योगफल सदैव समान होता है

पूर्णांकों में योग संक्रिया क्रम विनिमेय है।

3. ***कोई तीन पूर्णांक यथा*** + 5, -3 ***और*** -4 ***लें।***

$\{(+5) + (-3)\} + (-4) = (+2) + (-4) = -2$

पुनः $(+5) + \{(-3) + (-4)\} = (+5) + (-7) = -2$

इस प्रकार $\{(+5) + (-3)\} + (-4) = (+5) + \{(-3) + (-4)\}$

उपर्युक्त प्रकार से पूर्णांकों (-5), (+ 4) *तथा* (+ 6) *और* (-8), (-3) *तथा* (+ 9) *के लिये परिणामों की तुलना करके निष्कर्ष निकालिए कि तीन पूर्णांकों के योगफल ज्ञात करने में किन्हीं दो पूर्णांकों के योगफल में तीसरे पूर्णांक को जोड़ने पर प्राप्त योगफल समान होता है।*

पूर्णांकों पर योग-संक्रिया साहचर्य नियम का पालन करती है।

4.*देखिये,*

(–4) + 0 = –4, (+7) + 0 = +7

(–11) + 0 = –11, 0 + (–5) = –5

इस प्रकार

प्रत्येक पूर्णांक का 0 के साथ योगफल उसी पूर्णांक के समान होता है। इसी कारण शून्य योग-संक्रिया का तत्समक अवयव (Identity Element) है।

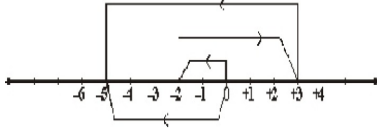
6.*पूर्ण संख्याओं में हम जानते हैं कि प्रत्येक पूर्ण संख्या में* 1 *जोड़ने पर उसका अनुवर्ती प्राप्त होता है। परन्तु शून्य किसी पूर्ण संख्या का अनुवर्ती नहीं है। पूर्णांकों मे भी इसी प्रकार प्रत्येक पूर्णांक में* 1 *जोड़कर उसका अनुवर्ती प्राप्त करते हैं। उदाहरणत* (-5) + 1 =4, *इसलिये* -4 *पूर्णांक* -5 *का अनुवर्ती है। चूंकि* (-1) + 1 = 0, *इस प्रकार पूर्णांक* -1 *का अनुवर्ती* 0 *है। उपर्युक्त से स्पष्ट है कि*

प्रत्येक पूर्णांक का अनुवर्ती होता है, यह उस पूर्णांक में 1 *जोड़कर प्राप्त होता है।*

इसी प्रगुण के आधार पर हम निष्कर्ष निकालते हैं कि सबसे बड़े पूर्णांक का अस्तित्व नहीं है। सबसे छोटा पूर्णांक भी नहीं होता है। बताए क्यों

उदाहरण 6. *संख्या रेखा खीचिए। इस पर* (-2) + 5 + (-8) *का योग प्रदर्शित कीजिए।*

हल :

-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4

इस प्रकार (-2) + 5 + (-8) =-5

प्रयास कीजिए :

निम्नलिखित का मान संख्या-रेखा पर प्रदर्शित कीजिए।

(क) (-5) + 7)-1 + (-2) + 2 (ङ) (-2) + (-3) + (+ 7)

3.5.3 पूर्णांकों का घटाना :

(i) इन्हें कीजिए :

(+ 5) - (+ 3) का मान रंगीन चकतियों की सहायता से ज्ञात कीजिए।

(+ 5) =5 लाल रंग की चकतियाँ

(+ 3) =3 लाल रंग की चकतियाँ

∴ (+5) – (+3) = ●●[●●●] – ●●● = ●●

= +2

इस प्रकार (+5) – (+3) = +2

मान बताइए (+5) + (-3) = [ ]

(ii) (-7) - (-4)का मान ज्ञात कीजिए

(-7) =7 काले रंग की चकतियाँ ●● ●● ●● ●

(-4) =4काले रंग की चकतियाँ ●● ●●

∴ (-7) - (-4) ●●● [●●●●] – ●●●●= ●●●

= (–7) – (–4) = –3

इस प्रकार (–7) – (–4) = –3

ज्ञात कीजिए (–7) + (+ 4) = ☐

(iii)(+3) – (–4) का मान ज्ञात कीजिए ।

(+ 3) =लाल रंग की तीन चकतियाँ

(-4) =काले रंग की चार चकतियाँ

(+ 3) - (-4) का मान ज्ञात करने के लिए लाल रंग की तीन चकतियों में से काले रंग की चार चकतियाँ निकालनी हैं।

+ 3 =तीन लाल चकतियाँ = ● ● ●

= ● ● ● + [●●●● / ●●●●] =3+ +4-4

= 3 + चार शून्य यु(i)म

– 4= निकाली गयी चार काली चकतियाँ = ●●●●

∴ (+3) – (–4) = बची चकतियाँ

= ● ● ● + ● ● ● ● = ● ● ● ● ● ● ●

= सात लाल चकतियाँ

=+ 7

इस प्रकार (+ 3) - (-4) =+ 7 यहाँ भी (+ 3) + (+ 4) =+ 7 यहाँ भी (+ 3) + (+ 4) =+ 7

(iv) (–2) – (–5) *का मान ज्ञात कीजिये*

(–2) =*काले रंग की दो चकतियाँ*= ●● + [●●● / ●●●] = –2 + [(–3) + 3]

(-5) =*काले रंग की पाँच चकतियाँ* = ●●●●●

(–2) – (–5) = *काले रंग की दो चकतियों से काले रंग की पाँच चकतियाँ घटानी हैं*।

इस प्रकार

(–2) – (–5) = ●● [●●● / ●●●] – ●●●●● = ●●●

अतः (–2) – (–5) = + 3

यहाँ (–2) + (+5) = + 3

इस प्रकार किसी पूर्णांक से दूसरे पूर्णांक को घटाने को पहले पूर्णांक में दूसरे के योगात्मक प्रतिलोम के योग द्वारा व्यक्त कर सकते हैं।

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित प्रश्नों में मान ज्ञात कीजिए :

1. *समान चिह्नों के पूर्णांक* :

(+4) – (+2), (–5) – (–3), (+6) – (+3)

(+6) – (+4), (+5) – (+4), (+3) – (+5)

(–4) – (–6), (+2) – (+3), (–3) – (–4)

(+5) – (+6)

2. ***असमान चिह्नों के पूर्णांक*** :

(–5) – (+3), (+4) – (–2), (–3) – (+2), (+3) – (–3)

(–4) – (+3), (+5) – (–3), (–6) – (+2)

प्रयास कीजिए **:**

उपर्युक्त विधि से निम्नांकित के मान बताए ।

(i) (+3) – (+4) **(ii)** (–3) – (–2) **(iii)** (–5) – (+4)

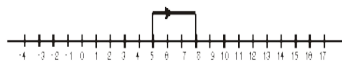
(iv) (+7) – (+3) **(v)** (+4) – (+6) **(vi)** (–5) – (–3)

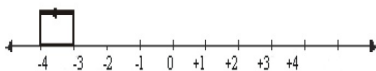
संख्या रेखा की सहायता से पूर्णांकों का घटाना **:**

हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं में संख्या रेखा पर 8 -5 ***का अर्थ है कि*** 5 ***से हम कितना और किस दिशा में चलें कि*** 8***पर पहुँच जायें***। ***इसी प्रकार पूर्णांकों में*** (+ 8) - (+ 5) ***का अर्थ है कि संख्या रेखा पर*** + 5 ***से कितना और किस दिशा में चलें कि*** + 8***पर पहुँच जायें***। ***चूँकि हम*** + 5 ***से*** 3 ***इकाई दायीं ओर चल कर*** + 8 ***तक पहुँचते हैं, अतः***

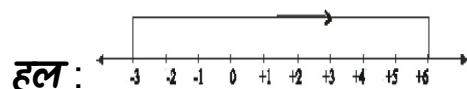
(+ 8) - (+ 5) =3

इसे संख्या रेखा पर इस प्रकार प्रदर्शित करते हैं

-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

इसी प्रकार (-4) - (-3) ***का अर्थ है कि संख्या रेखा पर*** (-3) ***से कितना और किस दिशा में चले कि*** -4 ***पर पहुँच जायें*** ।

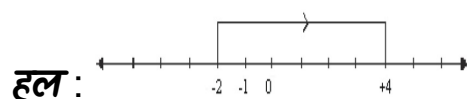
-4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4

अतः (-4) - (-3) =-1

(i) संख्या रेखा की सहायता से (+ 6) - (-3) का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

-3 से + 6तक विस्थापित होने के लिए 9 इकाई दाहिने जाना पड़ता है।

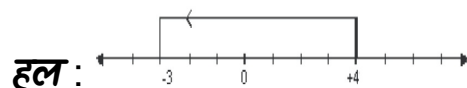
∴ (+6) – (–3) = + 9

(ii) (+4) – (–2) का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

-2 से + 4 तक विस्थापित होने के लिए 6 इकाई दाहिने जाना पड़ता है।

अतः (+ 4) - (-2) =+ 6

(iii) (–3) – (+4) का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

चूँकि + 4 से -3 तक पहुँचने के लिए 7 इकाई बायें जाना पड़ता है।

अतः (-3) - (+ 4) =- 7

प्रयास कीजिए :

उपर्युक्त विधि से निम्नलिखित का मान बताइये।

(d) (–2) – (–3) ([k) (+5) – (+3) (x) (–4) – (–2)

घटाने की संक्रिया के प्रगुण

(1) दो पूर्णांक जैसे -6 और 7 लें।

(-6) - 7 =(-6) - (+ 7)

=(-6) + (-7) =- 13 *जो एक पूर्णांक है।*

इसी प्रकार पूर्णांकों के अन्य दो जोड़े जैसे -8 *और* - 3*तथा* 6 *और* 4 *लीजिए।*

(–8) – (–3) = (–8) + (+3) = –5 *जो एक पूर्णांक है।*

पुन: 6 – 4 = 6 – (+4) = 6 + (–4) = 2 *भी एक पूर्णांक है।*

इस प्रकार हम देखते हैं कि

यदि दो पूर्णांक लें तो किसी एक को दूसरे से घटाने पर पूर्णांक प्राप्त होता है।

अत: पूर्णांकों में घटाना संवरक है। जबकि आप पहले देख चुके हैं कि यह प्रगुण पूर्ण संख्याओं में सत्य नहीं है।

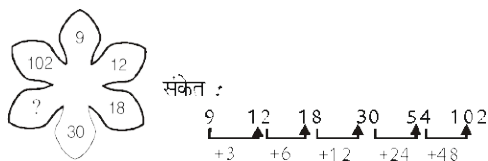
2.*पूर्णांकों में शून्य का पूर्ववर्ती* '-1' *है। पूर्ण संख्याओं में शून्य का पूर्ववर्ती नहीं होता है।*

3.*पूर्णांकों में घटाने की संक्रिया क्रम-विनिमेय का पालन नहीं करती है।*

यह ठीक इसी रूप में पूर्ण संख्याओं में भी सत्य है।

4.*किसी पूर्णांक से शून्य घटाने पर परिणाम वही पूर्णांक होता है। जैसे* (–6) – 0 =–6.

अभ्यास **3(c)**

1. *प्रश्न वाचक चिह्न* ? *के स्थान पर कौन-सी संख्या होगी।*

(i) 40 **(ii)** 54 **(iii)** 45 **(iv)** 60

2.*प्रत्येक पूर्णांक का पूर्ववर्ती ज्ञात कीजिए*

(i) 6 **(ii)** – 4 **(iii)** –19 **(iv)** –996 **(v)** 0

3. *अपनी अभ्यास पुस्तिका में खाली स्थान ☐ अथवा भरिये*

(d) (–3) + (–6) ☐ (–3) – (–6)

([k) (–21) – (–21) ☐ (–21) + (–21)

(x) (–27) – (+27) ☐ 27 – (+45)

4.*खाली जगह भरिये*

13	11	9	7
67	?	27	7

(i) 57 **(ii)** 62 **(iii)** 47 **(iv)** 52

5.*प्रत्येक पूर्णांक का उत्तरवर्ती ज्ञात कीजिए*

(i) 7 **(ii)** –5 **(iii)** –20 **(iv)** –997 **(v)** 0

6.*किसी स्थान पर* 12 ***बजे दोपहर तापमान शून्य से*** 18 ° ***सेल्सियस अधिक था तथा अद्र्धरात्रि को तापमान*** 0° ***से*** 20 ***सेल्सियस कम हो गया । तापमान में परिवर्तन ज्ञात कीजिए ।***

7.*प्लेटो का जन्म* 429 ***ईसा पूर्व में हुआ था तथा*** 348 ***ईसा पूर्व में दिवंगत हुये । वे कितने वर्षों तक जीवित रहे*** ?

8.*समुद्र तल से अधिकतम गहराई वाला बिन्दु* 11600 ***मीटर नीचे है । अधिकतम ऊँचाई की पर्वत चोटी समुद्र तल से*** 8846 ***मीटर ऊँची है । गहराई***

वाले बिन्दु से चोटी की ऊँचाई बताइए।

3.5.4 पूर्णांकों पर गुणन संक्रिया

हम जानते हैं कि गुणन संक्रिया बार-बार जोड़ने की क्रिया है।

इस प्रकार

$4 \times (-5) = (-5) + (-5) + (-5) + (-5)$

$= -20$

$= -(4 \times 5)$

$3 \times (-6) = (-6) + (-6) + (-6)$

$= -18$

$= -(3 \times 6)$

अब हम गुणनफल $(-3) \times 4$ पर विचार करते हैं।

देखिये, $(-3) \times 4 = 4 \times (-3)$ डगुणन संक्रिया का क्रम-विनिमेय नियम

$= (-3) + (-3) + (-3) + (-3)$

$= -12$

$= -(3 \times 4)$

इसी प्रकार $-2 \times 5 = 5 \times (-2) = -10$

$-8 \times 4 = 4 \times (-8) = -32$

और $-5 \times 7 = 7 \times (-5) = -35$

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि

एक धनात्मक और एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल ऋणात्मक पूर्णांक होता है।

प्रयास कीजिए :

अपनी अभ्यास पुस्तिका में निम्नांकित गुणनफलों का मान रिक्त स्थानों में भरिए।

$5 \times (-4) = \square$ $(-3) \times 6 = \square$

$7 \times (-3) = \square$ $(-4) \times 6 = \square$

निष्कर्ष :

एक धनात्मक और एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल ज्ञात करने के लिए दोनों पूर्णांकों के निरपेक्ष मानों के गुणनफल के पूर्व ऋण चिह्न लगाते हैं।

ध्यान दीजिए :

यदि दो पूर्णांक धनात्मक हैं, तो वे पूर्ण संख्याएं ही हैं और उनका गुणनफल भी पूर्ण संख्याओं के गुणनफल की भाँति ज्ञात करते हैं। यथा

$(+7) \times (+4) = +28 = 7 \times 4$

$(+8) \times (+3) = +24 = 8 \times 3$

दो ऋणपूर्णांकों का गुणनफल

यदि दो पूर्णांक -3 ***और*** -4 ***हैं, तो*** $(-3) \times (-4)$ ***का मान ज्ञात करने के लिये निम्नांकित पैटर्न देखिए:***

$4 \times (-4) = (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = -16$

$3 \times (-4) = (-4) + (-4) + (-4) = -12$

$2 \times (-4) = (-4) + (-4) = -8$

$1 \times (-4) = (-4) = -4$

$0 \times (-4) = 0 = 0$

$-1 \times (-4) = ?$

ऊपर से आरम्भ करके गुणनफल के मान क्रमश: -16, -12,-8, -4, 0 ***हैं***। ***इस प्रकार गुणनफल सतत*** + 4 ***से बढ़ रहे हैं***।

उपर्युक्त नियमानुसार

$(-1) \times (-4) = 0 + 4 = 4$

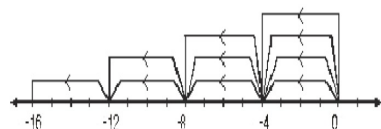
$(-2) \times (-4) = 4 + 4 = 8$

$(-3) \times (-4) = 8 + 4 = 12$

अतः $(-3) \times (-4) = 12$

निष्कर्ष **:**

दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल धनात्मक पूर्णांक होता है।

संख्या रेखा की सहायता से गुणन संक्रिया

$4 \times (-4) = -4$ ***के बराबर*** 4 ***बार विस्थापन***

अतः $4 \times (-4) = -16$

$3 \times (-4) = -4$ ***के बराबर*** 3 ***बार विस्थापन***

अतः $3 \times (-4) = -12$

$2 \times (-4) = -4$ के बराबर 2बार विस्थापन

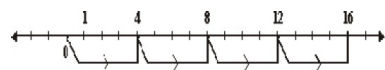
इसलिए $2 \times (-4) = -8$

$1 \times (-4) = -4$ के बराबर 1 बार विस्थापन

इसलिए $1 \times (-4) = -4$

$0 \times (-4) = 0$ क्यों ?

इसलिए $(-1) \times (-4) = +4$ के बराबर 1 बार विस्थापन

$= +4$

$(-2) \times (-4) = +4$ के बराबर 2 बार विस्थापन

$(-2) \times (-4) = +8$

इसी प्रकार

$\therefore (-3) \times (-4) = +12$

$(-4) \times (-4) = +16$

निष्कर्ष :

दो धनात्मक अथवा दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल धनात्मक पूर्णांक होता है।

प्रयास कीजिए

अपनी अभ्यास पुस्तिका में खाली जगह भरिए

$(+3)\times(+6)$	$(-2)\times(-4)$	-4×-5	$(-0)\times(-1)$
18			

गुणन संक्रिया के प्रगुण

पूर्ण संख्याओं में गुणन संक्रिया के समस्त प्रगुण पूर्णांकों में गुणन संक्रिया के लिए पूर्णतः सत्य हैं।

(1) *कोई दो पूर्णांक लें, यथा* (+ 3) *व* (- 4)

$(+3) \times (-4) = -12$

इसी प्रकार $(-2) \times (-8) = 16$ leLee $(-5) \times (+3) = -15$

यहाँ प्राप्त गुणनफल –12, 16 ***तथा*** – 15 ***प्रत्येक पूर्णांक है।***

अतः किन्हीं दो पूर्णांको का गुणनफल भी पूर्णांक होता है। यह गुणा का संवरक प्रगुण है।

ध्यान दीजिए

(2) ***क्योंकि*** $(+2) \times (-3) = -6$

तथा $(-3) \times (+2) = -6$

अतः $(+2) \times (-3) = (-3) \times (+2)$

इसी प्रकार अन्य पूर्णांकों के लिए भी जाँच करके निष्कर्ष निकालिए कि

किन्हीं दो पूर्णांकों के गुणन-संक्रिया में पूर्णांकों के क्रम को बदलने पर गुणनफल नहीं बदलता। यह गुणा का क्रम विनिमेय नियम है।

(3) ***कोई तीन पूर्णांक लीजिए - यथा***

$(-2 \times 3) \times 5 = -6 \times 5 = -30$

$-2 \times (3 \times 5) = -2 \times 15 = -30$

अत: $(-2 \times 3) \times 5 = -2 \times (3 \times 5)$

इसी प्रकार $(4 \times 5) \times 7 = 4 \times (5 \times 7)$

तथा $(-6 \times 8) \times 2 = -6 \times (8 \times 2)$

अत: तीन पूर्णांकों के गुणन-संक्रिया में पहलेa किन्हीं दो पूर्णांकों के गुणनफल में तीसरे पूर्णांक से गुणा करने पर प्रत्येक दशा में गुणनफल समान रहता है। यह गुणा का साहचर्य नियम है।

(4) $2 \times 0 = 0 \times 2 = 0$

$-3 \times 0 = 0 \times (-3) = 0$

तथा $0 \times 5 = 5 \times 0 = 0$

अत: किसी पूर्णांक में शून्य से गुणा करने पर गुणनफल सदैव 'शून्य' होता है।

(5) $5 \times 1 = 1 \times 5 = 5$; $(-2) \times 1 = 1 \times (-2) = -2$ ***तथा*** $0 \times 1 = 1 \times 0 = 0$

अत: किसी पूर्णांक में 1 से गुणा करने पर गुणनफल वही पूर्णांक आता है।

(6) $3 \times (-1) = (-1) \times 3 = -3$; $(-5) \times (-1) = (-1) \times (-5) = 5$

इसी प्रकार कोई पूर्णांक लेकर उसमें (-1) से गुणा कर गुणनफल ज्ञात कीजिए। 3 का योगात्मक प्रतिलोम - 3, क्योंकि 3 + (-3) =0 तथा –5 को योगात्मक प्रतिलोम 5 या + 5 है क्योंकि – 5 + (+ 5) ==0

अतः

किसी पूर्णांक का योगात्मक प्रतिलोम प्राप्त करने के लिये उसमें - 1 से गुणा करते हैं।

ध्यान दीजिए :-

(7) (i) $-2 \times (3 + 5) = -2 \times 8 = -16$

$-2 \times 3 + (-2) \times 5 = (-6) + (-10) = -16$

अतः $-2 \times (3 + 5) = -2 \times 3 + (-2) \times 5$

इसी प्रकार, तीन अन्य पूर्णांकों को लेकर जाँच कीजिए एवं निष्कर्ष निकालिए कि -

पहला पूर्णांक ×(दूसरा पूर्णांक + तीसरा पूर्णांक) =पहला पूर्णांक × दूसरा पूर्णांक + पहला पूर्णांक ×तीसरा पूर्णांक

(ii) ***पूर्णांक*** – 3, 7 ***एवं*** 5 ***लें***

$-3 \times (7-5) = -3 \times 2 = -6$

$(-3) \times 7 - (-3) \times 5 = -21 - (-15) = -21 + 15 = -6$

इसी प्रकार, तीन अन्य पूर्णांकों को लेकर जाँच कीजिए एवं निष्कर्ष निकालिए कि -

पहला पूर्णांक × (दूसरा पूर्णांक – तीसरा पूर्णांक) =पहला पूर्णांक× दूसरा पूर्णांक – पहला पूर्णांक × तीसरा पूर्णांक

अभ्यास 3 (d)

1. ***रिक्त स्थान को भरिए***

7	9	11	13
7	27	55	

(क) 77 (ख) 91 (ग) 81 (घ) 98

2. *निम्नांकित का मान ज्ञात कीजिए*

(क) $8 \times (-4) \times (-5)$ **(ख)** $(-10) \times (-10) \times (-10)$

(ग) $(-2) \times 35 \times (-5)$ **(घ)** $(-8) \times (+57) \times 0$

(ङ) $(-1) \times (-2) \times (-3) \times (-4)$ **(च)** $(-4) \times (-8) \times (-12) \times (-5)$

3.*निम्नांकित के मान ज्ञात कीजिए* :

(क) $(-7) \times (0) \times (57) \times (-57)$

(ख) $1456 \times 625 - 456 \times 625$

संकेत $(1456 - 456) \times 625$ ***के रूप में लिखकर हल कीजिए***

(ग) $(-187) \times (-54) + (-187) \times (-46)$

संकेत $(-187)\ [(-54) + (-46)]$ ***के रूप में लिखकर हल कीजिए***

(ग) $18764 \times 99 - (-18764)$

(ङ) $15341 \times (-2) + (-15341) \times 98$

(च) $(-8) \times \{10 - 5 - 43 + 98\}$

4.*पंक्ति 'क' के दो पूर्णांकों का गुणन फल पंक्ति 'ख' में दिये गये हैं। इन्हें मिलान कर लिखिए।*

(क) $3 \times (-2)$, $(-4) \times (-5)$, $(-6) \times 4)$, 7×5 , $(-8) \times (-3)$, $5 \times (-3)$,

(ख) –15, 35, –6, 20, –24, 24

5.*पंक्ति 'क' के दो पूर्णांकों का गुणन फल पंक्ति 'ख' में दिये गये हैं। इन्हें मिलान कर लिखिए।*

(क) –37 **(ख)** 49 **(ग)** 0

6.*उत्तर के चार विकल्पों में से सही उत्तर बताइए*

(क) $(3 + 2) \times 7$ ***का मान है***

(i) $3 + 2 \times 7$ **(ii)** $3 \times 7 + 2$

(iii) $3 \times 7 + 2 \times 7$ **(iv)** $3 \times 7 - 2 \times 7$

(ख) $(3 - 2) \times 6$ ***का मान है***

(i) $3 \times 6 - 2 \times 6$ **(ii)** $3 \times 6 - 2$

(iii) $3 \times 6 + 2 \times 6$ **(iv)** $3 \times 2 \times 6$

(ग) $(-8) \times (-5)$ ***का मान है***

(i) -40 **(ii)** 40 **(iii)** 13

(iv) ***उपर्युक्त में कोई नहीं***

(घ) ***तीन ऋणात्मक पूर्णांकों के गुणनफल में एक धनात्मक पूर्णांक से गुणा करने पर गुणनफल का चिह्न है*** :

(i) ***धनात्मक*** (ii) ***न तो धनात्मक और न ऋणात्मक***

(iii) ***ऋणात्मक*** (iv) ***उपर्युक्त से कोई नहीं***

7.***निम्नलिखित में सत्य अथवा असत्य बताइए*** :

(i) 5***ऋणात्मक पूर्णांकों का सतत् गुणनफल धनात्मक है***।

(ii) ***दो ऋणमक पूर्णांकों का गुणनफल धनात्मक है***।

(iii)***दो पूर्णांकों में यदि केवल एक ऋणात्मक है, तो उनका गुणनफल ऋणात्मक होता है***।

(iv) -17 ***का विपरीत*** + 17 ***है***।

(v) ***किसी पूर्णांक का विपरीत ज्ञात करने के लिये उसमें शून्य से गुणा करते हैं***।

(vi) 1 ***से किसी पूर्णांक में गुणा करने पर गुणनफल वही पूर्णांक होता है***।

3.5.4 पूर्णांकों में भाग संक्रिया

हमने सीखा है कि पूर्ण संख्याओं में भाग संक्रिया, गुणन संक्रिया की विलोम है। साथ ही एक गुणनफल तथ्य के संगत भाग संक्रिया के दो तथ्य मिलते हैं। यथा

$5 \times 7 = 35$ का अर्थ

$35 \div 5 = 7$

तथा $35 \div 7 = 5$

पूर्णांकों की स्थिति में भी गुणनफल तथ्य $(-6) \times 3 = -18$ के संगत भाग संक्रिया के दो तथ्य मिलते हैं। यथा

$-18 \div (-6) = 3$

$-18 \div 3 = -6$

उपर्युक्त उदाहरणों में स्पष्ट है कि

जब भाज्य और भाजक दोनों धनात्मक या दोनों ऋणात्मक हैं तो भागफल धनात्मक होता है।

जब भाज्य तथा भाजक में एक धनात्मक तथा दूसरा ऋणात्मक हो तो भागफल ऋणात्मक होता है।

प्रयास कीजिए :

$20 \div 4$, $28 \div 7$, $(-15) \div (-3)$, $(-36) \div (-9)$ के मान बताइए।

उपर्युक्त उदाहरणों से हम देखते हैं कि

यदि भाज्य और भाजक समान चिह्नों (अर्थात् दोनों धन अथवा दोनों ऋण) के हों तो भागफल धनात्मक होता है।

पुनः

प्रयास कीजिए :

-16 ÷ 4, 42 ÷ (-6), 54 ÷ (-9), -48 ÷ 8 **के मान बताइए।**

उपर्युक्त उदाहरणों से हमें ज्ञात होता है कि

यदि भाज्य और भाजक विपरीत चिह्नों के हों तो भागफल ऋणात्मक होता है।

उदाहरण 7 मान ज्ञात कीजिए

(i) – 68 ÷ 17 **(ii)** 78 ÷ (–13)

(iii) (–75) ÷ (–15) **(iv)** +64 ÷ (+16)

हल **(i)** – 68 ÷ 17= $\frac{-68}{17} = -4$ **(ii)** 78 ÷ (–13) = $\frac{78}{-13} = -6$

(iii) –75 ÷ (–15) = $\frac{-75}{-15} = +5$ **(iv)** 64 ÷ 16 = $\frac{+64}{+16} = 4$

भाग संक्रिया के प्रगुण

(1) 6 ÷ 3 =2; 10 ÷ 2 =5 **तथा** – 8÷ 4=–2

यहाँ भागफल 2, 5 **तथा** – 2 **पूर्णांक हैं।**

किन्तु 8 ÷ 3 = $\frac{8}{3}$ **(पूर्णांक नहीं है)**

– 7 ÷ 11 = $-\frac{7}{11}$ **(पूर्णांक नहीं है)**

अत:

दो पूर्णांकों का भागफल सदैव पूर्णांक नहीं होता है।

(2)*शून्येतर पूर्णांक की दशा में* -

$3 \div 3 = 1$; $(-6) \div (-6) = 1$ leLee $(-2) \div (-2) = 1$

अत:

किसी शून्येतर पूर्णांक में उसी पूर्णांक से भाग देने पर भागफल सदैव 1 होता है।

(3) $5 \div 1 = 5$; $-3 \div 1 = -3$ ***तथा*** $0 \div 1 = 0$

किसी पूर्णांक में 1 से भाग देने पर भागफल वही पूर्णांक होता है।

(4) $0 \div 3 = 0$; $0 \div (-2) = 0$ ***तथा*** $0 \div 7 = 0$

पूर्णांक 0 ***में किसी शून्येतर पूर्णांक से भाग देने पर प्रत्येक दशा में भागफल*** '0' ***आता है।***

(5) किसी पूर्णांक में '0' का भाग परिभाषित नहीं है।

अभ्यास 3 (e)

1. *भागफल ज्ञात कीजिए।*

(क) $21 \div (-3)$ **(ख)** $-36 \div 9$ **(ग)** $(-18) \div (-6)$

(घ) 35 ÷ (–7) **(च)** (–51) ÷ 17 **(छ)** 0 ÷ (–11)

(ज) (–1728) ÷ 12 **(त)** –15625 ÷ 125 **(थ)** (–729) ÷ (–9)

(द) 1051 ÷ (–1) **(ध)** 20000 ÷ (–1000) **(न)** 17672 ÷ (–17672)

2. ***प्रश्नवाचक चिह्न ? के स्थान पर संख्या होगी-***

(i) (18 – 3) + (9×2) - 6 = ?

(**क**) 12 (**ख**) 9 (**ग**) 27 (**घ**) 39

(ii) (28 + 4) – (10 × 5) + (4 ÷ 2) = ?

(**क**) 23(**ख**) - 12 (**ग**) 17 (**घ**) - 16

3. ***स्तम्भ 'क' और 'ख' दिये गये हैं। स्तम्भ 'क' में अंकित भाग के प्रश्नों के उत्तर स्तम्भ 'ख' में अव्यवस्थित क्रम में दिये गये हैं। अपनी अभ्यास पुस्तिका में स्तम्भ 'क' के भाग के प्रश्न का स्तम्भ 'ख' में उसके उत्तर से मिलान कीजिए।***

क	***ख***
6 ÷ 3	6
–12 ÷ 6	–4
18 ÷ –6	–7
–21 ÷ –7	2
24 ÷ 4	–3
–25 ÷ –5	3

–21 ÷ 3 –2

28 ÷ -7 5

4. प्रश्न के प्रत्येक खंड में उत्तर के चार विकल्प दिये गये हैं। इन उत्तरों में से केवल एक सही है। सही उत्तर अपनी अभ्यास पुस्तिका में लिखिए।

(क) -36 ÷ 9 का चिह्न है

(i) धन (ii) ऋण

(iii) न तो धन और न ऋण (iv) उपर्युक्त में से कोई नहीं

(ख) 27 ÷ (–3) का चिह्न है

(i) न तो धन और न ऋण (ii) धन

(iii) ऋण (iv) उपर्युक्त में से कोई नहीं

(ग) –36 ÷ (– 4) का चिह्न है

(i) धन (ii) न तो धन और न ऋण

(iv) ऋण (v) उपर्युक्त में से कोई नहीं

(घ) 28 ÷ 7 के मान का चिह्न है

(i) ऋण (ii) धन

(iii) न तो धन और न ऋण

(iv) उपर्युक्त में से कोई नहीं

3.6 कोष्ठकों (Brackets) का प्रयोग

सविता एवं मेरी दोनों सहेली हैं। एक दिन दोनों सेब खरीदने बाजार गयीं। सविता ने 3 कि ग्राराम और मेरी ने 5कि ग्राराम सेब खरीदे । यदि दुकानदार रु. 40 प्रति किग्रा राम की दर से सेब बेच रहा है तो दोनों मिलकर दुकानदार को कितने रुपये देंगी ?

सविता ने कुल धनराशि निम्नवत् परिकलित की :

3 + 5 × 40

=3 + 200

= रु 203

मेरी पहले दोनों सहेलियों द्वारा खरीदे गये सेब की कुल मात्रा 3 कि ग्रा राम + 5 किग्रा राम

=5 किग्रा राम ज्ञात करती हैं और फिर

कुल धनराशि =8 × 40

= रु 320

सोचिए, किसका परिकलन सही है और क्यों ? दुकानदार बताता है कि मेरी ने सही हिसाब लगाया है और उसे कुल रू320 ही चाहिए। दोनों दुकानदार को रू320 अदा कर देती हैं किन्तु सविता के मन में एक उलझन बनी रहती है कि उसका परिकलन क्यों गलत है। सविता घर आकर अपनी बड़ी बहन सुमन से पूछती है तो सुमन सविता को ऐसी स्थिति में कोष्ठकों का प्रयोग कर परिकलन करने की बात निम्नवत् समझाती हैं :

कुल धनराशि = (3 + 5) × 40

= रु 8 ×40

=320

कोष्ठकों का उचित प्रयोग कर पहले कोष्ठकों के अन्तर की संख्याओं को एक संख्या के रूप में प्राप्त कर लेते हैं और पुन: कोष्ठक के बाहर दी हुई संक्रिया कर अभीष्ट परिकलन करते हैं।

स्मरण कीजिए और ध्यान दीजिए

(i) ***सामान्यत: हम क्रम में पहले भाग, फिर गुणा और फिर जोड़ और घटाने की संक्रिया करके पद***

संहतियों को सरल करते हैं।

(*क*) $35 \div 7 + 4 = 5 + 4 = 9$

(*ख*) $13 - 4 \div 2 = 13 - 2 = 11$

(*ग*) $55 - 6 \times 3 + 32 - 3$

$= 55 - 18 + 32 - 3$

$= 55 + 32 - 18 - 3$

$= 87 - 21$

$= 66$

(ii) ***यदि हम कहें कि*** 36 ***में*** 4 ***और*** 3 ***के गुणनफल से भाग दीजिए तो इसे निम्नांकित ढंग से लिखा जाएगा।***

$36 \div (4 \times 3)$

यदि इसे $36 \div 4 \times 3$ ***लिखा जाता, तो उत्तर*** $9 \times 3 = 27$ ***आता जो अशुद्ध है।***

इसी प्रकार $48 \div (3 + 5)$ ***का अर्थ है कि पहले*** 3 ***और*** 5 ***को जोड़कर योगफल से*** 48 ***में भाग दीजिए। यदि हम कोष्ठक*** () ***का प्रयोग नहीं करते हैं तो इसका रूप*** $48 \div 3 + 5$ ***होता है। इसके अनुसार इसका मान परम्परागत ढंग से निम्नांकित हैं।***

$48 \div 3 + 5 = 16 + 5 = 21$

जबकि $48 \div (3 + 5) = 6$

अत: इस प्रकार की अशुद्धियों से बचने के लिए कोष्ठक का प्रयोग किया जाता है।

(iii) *कभी-कभी निम्नलिखित प्रकार की समस्याएं सामने आती हैं।*

120 *में* 4 *और* 3 *के गुणनफल से* 8 *बड़ी संख्या का भागफल ज्ञात कीजिए।*

4 *और* 3 *के गुणनफल* (4×3) *के रूप में लेते हैं।*

4 *और* 3 *के गुणनफल से* 8 *अधिक संख्या को* $\{(4 \times 3)+ 8\}$ *के रूप में समझते हैं। इस प्रकार अभीष्ट भागफल* $=120 \div \{(4 \times 3) + 8\} = 6$

ऐसा करने में एक दूसरे प्रकार के कोष्ठक '{ }' *का प्रयोग किया है।*

गणित में सामान्यतः निम्नलिखित चार प्रकार के कोष्ठकों का प्रयोग प्रचलित है।

प्रतीक नाम

— *रेखा कोष्ठक* **(Line Bracket)**

( ) *छोटा कोष्ठक* **(parentheses ; round bracket)**

{ } *मँझला कोष्ठक* **(braces, Curly bracket)**

[ ]*बड़ा कोष्ठक* **(square bracket)**

प्रत्येक कोष्ठक का बायां भाग कोष्ठक का प्रारम्भ और दायाँ भाग कोष्ठक का अंत व्यक्त करता है।

(i)*क्रमानुसार रेखा कोष्ठक, छोटा कोष्ठक, मँझला कोष्ठक तथा बड़ा कोष्ठक हटाकर सरलीकरण की क्रिया की जाती है। नियम यह है कि कोष्ठक चाहे जिस क्रम में लगे हो सबसे पहले अन्तर के कोष्ठक को क्रम से हटा कर क्रिया सम्पन्न की जाती है।*

(ii)*कोष्ठक के पूर्व यदि* '+ ' *चिह्न होता है तो कोष्ठक हटाने पर कोष्ठक के अन्तर* '+ ' *और* '-' *चिह्न यथावत् रहते हैं।*

इसी प्रकार यदि कोष्ठक के पूर्व '-' *ऋण चिह्न हो तो कोष्ठक के हटाने पर उसके अन्तर के* '+ ' *और* '-' *चिह्न अंत:परिवर्तित हो जाते हैं।*

(iii)*यदि कोष्ठक के पहले या बाद में कोई संख्या हो और उस संख्या तथा कोष्ठक के बीच में कोई चिह्न न हो तो वहाँ पर गुणा का चिह्न समझना चाहिए।*

(iv)*प्रत्येक कोष्ठक को हटाने से पूर्व उसका सरलीकरण कर लेना चाहिए।*

उदाहरण 8**:** 18 – [4 + {16 – (18 – 5)}] *का मान ज्ञात कीजिए*

हल : 18 – [4 + {16 – (18 – 5)}]

= 18 – [4 + {16 – 13}]

= 18 – [4 + 3]

= 18 – 7

= 11

BODMAS *नियम*

यदि व्यंजक या पद संहति में '*का*', ÷, ×, +, –, ( ) *का प्रयोग हुआ हो तो* BODMAS *अक्षरों से व्यक्त चिह्नों को क्रमानुसार पहले सरल किया जाता है।*

B = Brackets *कोष्ठक* ( )

O = Of *का* *का*

D = Division *भाग* ÷

M = Multiplication *गुणा* ×

A = Addition *योग* +

S = Subtraction *घटाना* –

कोष्ठकों के सरलीकरण में 'कोकाभागुयोघ' नियम का पालन अधिक सुविधाजनक रहता है, जहाँ को =कोष्ठक, का =का, भा =भाग, गु =गुणा, यो =योग, घ =घटाना।

उदाहरण* 9 :** $14 - [12 - \{9 - (7 - \overline{6-2})\}]$ ***को सरल कीजिए।

हल : $14 - [12 - \{9 - (7 - \overline{6-2})\}]$

$= 14 - [12 - \{9 - (7 - 4)]$ ***रेखा कोष्ठक हटाने पर***

$= 14 - [12 - \{9 - 3\}]$ ***छोटा कोष्ठक हटाने पर***

$= 14 - [12 - 6]$ ***मँझला कोष्ठक हटाने पर***

$= 14 - 6$ ***बड़ा कोष्ठक हटाने पर***

$= 8$

उदाहरण* 10. *सरल कीजिए $(-12) + (-6) \div 2 - [(-5) \times (-4) - \{2 - (3 - 5)\}]$

हल : $(-12) + (-6) \div 2 - [(-5) \times (-4) - \{2 - (3 - 5)\}]$

$= (-12) + (-6) \div 2 - [(-5) \times (-4) - \{2 + 2\}]$

$= (-12) + (-6) \div 2 - [(-5) \times (-4) - 4]$

$= (-12) + (-6) \div 2 - [20 - 4]$

$= (-12) + (-6) \div 2 - 16$

$= (-12) + (-3) - 16$

$= -15 - 16 = -31$

***अभ्यास* 3 (f)**

1. *निम्नांकित का मान ज्ञात कीजिए*

(i) 21 + 18 ÷ 3 **(ii)** 123 – 81 ÷ 9

(iii) 13 – (8 × 2) + 3 **(iv)** 12 – (13 – 12 ÷ 3)

(v) 28 – 5 × 7 + 7 **(vi)** 117 ÷ (7 + 6)

(vii) (–17) + 8 ÷ (7 – 3) **(viii)** (–3) + (–6) ÷ (–3)

(i*x*) 17 + (–2) × (–5) – 4 **(*x*)** 13 ÷ $\overline{4-3}$

(*x*i) (–36) × (–1) + (–24) ÷ 6 **(*x*ii)** (–5) – (– 45) ÷ (–15) + (–3) × 5

2. *कोष्ठकों की सहायता से निम्नलिखित कथनों के लिए गणितीय पद संहति लिखिए* ।

(*क*) ***आठ से छ और तीन के योगफल का गुणा*** ।

(**ख**) ***अठारह में चार और दो के योगफल का भाग*** ।

(*ग*) ***बीस में छऔर दो के अन्तर से भाग*** ।

(घ) ***चार और पाँच के गुणनफल से बारह का घटाना*** ।

(ङ) ***चालीस में पाँच और दो के योगफल से एक अधिक संख्या का भाग*** ।

(च) ***तीन से बारह और सात के अन्तर से एक कम संख्या का गुणा*** ।

3.*सरल कीजिए*

(*क*) 20 + {9 – 5 + (6 – 4)}

(ख) 80 × [56 – {7 × 8 + (13 – 2 × 5)}]

(*ग*) 121 ÷ [16 – {14 – 3 (9 – 6)}]

(घ) 5 [18 + {3 + 6 (5 – 3)}]

(ङ) (12 – 5) × [6 + {3 + $\overline{8-2}$}]

(च) 16 + {1 + (16 – 3) × 4}

(छ) 3 – [3 – {3 – (3 – $\overline{3-3}$)}]

(ज) $112 - [121 \div (11 \times 11) - (-4) - \{3 - \overline{8-1}\}]$

(झ) $(-2) \{(-5) + (-25)\} \times (-7) - (4 - 6) (-5)$

(ट) $15 - (-3) (4 - \overline{6-2}) \div 3 \{5 + (-3) \times (-6)\}$

(ठ) 4 ***का*** [25 – 18 ÷ {7- 2 ***का*** 3 - (13 - $\overline{4-3}$) + 5}]

इस इकाई से हमने सीखा

1. *दैनिक जीवन में हमें अनेक बार विपरीतताओं के मापन, छोटी पूर्ण संख्या से बड़ी पूर्ण संख्या घटाने की आवश्यकता पड़ती है जिसके कारण पूर्ण संख्याओं के संग्रह को विस्तारित करना पड़ता है। इसके लिए प्राकृतिक सख्ंयाओं* 1, 2, 3, 4, ... *के संगत हम नयी संख्याएं* -1, -2, -3, -4, ... *बनाते हैं*।

2. *पूर्णांकों के संग्रह में* 1, 2, 3, 4, ... *अर्थात् प्राकृतिक संख्याएँ धन पूर्णांक और* -1, -2,-3, ... *ऋण पूर्णांक कहलाते हैं। शून्य मात्र एक ऐसा पूर्णांक है जो न तो धनात्मक है और न ऋणात्मक*।

3. *पूर्णांकों को संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है। प्रत्येक धन पूर्णांक* $+x$ *के संगत एक ऋण पूर्णांक* -x *होता है। दोनों का योगफल सदैव* '0' *होता है अर्थात्* $x + (-x) = 0$, *व्यापकत:* x *और* -x *परस्पर योगात्मक प्रतिलोम कहलाते हैं*।

4. *प्रत्येक धन पूर्णांक समस्त ऋण पूर्णांकों से बड़ा होता है।*

5. *शून्य प्रत्येक धन पूर्णांक से छोटा और प्रत्येक ऋण पूर्णांक से बड़ा होता है।*

6. *दो धन पूर्णांकों का योगफल धन पूर्णांक और दो ऋण पूर्णांकों का योगफल ऋण पूर्णांक होता है।*

7. *असमान चिह्नों वाले पूर्णांकों का योगफल जोड़े जाने वाले पूर्णांकों के संख्यात्मक मानों के अन्तर के पूर्व बड़े संख्यात्मक मान वाले पूर्णांक का चिह्न लगा कर प्राप्त करते हैं।*

8. *पूर्णांकों में योग संक्रिया में संवरकता, क्रमविनिमेयता और साहचर्यता होती है।*

9.***पूर्णांकों में योग संक्रिया का तत्समक अवयव*** ‘0’ ***होता है।***

10.***पूर्णांकों में घटाने की संक्रिया संवरक है किन्तु क्रम विनिमेय और साहचर्यता नियम का पालन नहीं करती।***

11.***पूर्णांकों में घटाने का तत्समक अवयव नहीं होता।***

12.***दो धन अथवा दो ऋण पूर्णांकों का गुणनफल सदैव धन पूर्णांक होता है किन्तु विपरीत चिह्न वाले पूर्णांकों का गुणनफल सदैव ऋण पूर्णांक होता है।***

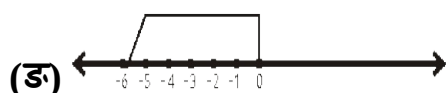
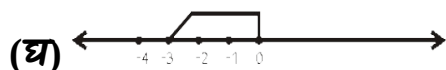
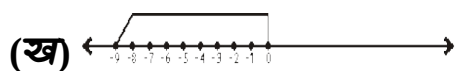
13.***पूर्णांकों में गुणन संक्रिया में संवरक, क्रमविनिमेय और साहचर्य प्रगुण होते हैं।***

14.***गणना में अशुद्धियों से बचने के लिए कोष्ठकों का प्रयोग करते हैं।***

15.***सामान्यतः क्रमानुसार रेखा कोष्ठक, छोटा कोष्ठक, मँझला कोष्ठक औरअन्त में बड़ा कोष्ठक हटाकर सरलीकरण की क्रिया की जाती है। नियम यह है कि कोष्ठक चाहे जिस क्रम में लगे हों, सबसे पहले अन्तर के कोष्ठक को क्रम से हटा कर सरलीकरण की क्रिया सम्पन्न की जाती है।***

उत्तरमाला

अभ्यास 3 **(a)**

1. (ii), **2**. (iii), **3.** (i) - 4^0 ***सेल्सियस***, (ii) + 7, (iii) - **रु** 3.28, (iv) - 18, (v) +1,000 ***मीटर***, **4**. (i) - 9, (ii) + 21, (iii) - 39, (iv) + 41, (v) - 91

6. (**क**) E, (**ख**) –3, (**ग**) C, (**घ**) + 5, –5, + 6; (**ङ**) K, D, M ; **7.** (**क**) -1, 0, + 1, + 2, (**ख**) 1, 2, 3, 4, 5; (**ग**) –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3; (**घ**) –4, –3, –2, –1, 0, 1; (**ङ**) –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4; (**च**) –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3; **8.** (**क**) 3, 4, (**ख**) –3, –2, –1; (**ग**) 4, 5, 6, 7; (**घ**) 1, 2, 3; (**ङ**) –4,–3; (**च**) 0, 1, 2, 3; **9.** (**क**) 13, (**ख**) 12, (**ग**) 37, (**घ**) 0, (**ङ**) 47, (**च**) 101; **10.** (**क**) ***असत्य***, (**ख**) ***सत्य***, (**ग**) ***असत्य***, (**घ**) ***सत्य***, (**ङ**) ***असत्य***, (**च**) ***असत्य*** ।

अभ्यास 3 **(b)**

1. (i) **2.** (ii) **3.** (**क**) ***पूर्णांक***, (**ख**) ***धन पूर्णांक***, (**ग**) ***ऋण पूर्णांक***, 4. (**क**) ***सत्य***, (**ख**) ***असत्य***, (**ग**)***असत्य***, (**घ**) ***सत्य***, (**च**) ***असत्य***, (**छ**)***सत्य***, (**ज**) ***सत्य***

अभ्यास 3 **(c)**

1. (ii) **2.**

(i) 5, (ii) –5, (iii) –20, (iv) –997, (v) –1; **3.** (**क**) <, (**ख**) >, (**ग**) <; **4.** (iii) **5.** (i) 8, (ii) –8. 20446 ***मी***

अभ्यास 3**(d)**

1. (**ख**), **2.**, (**क**) 160, (**ख**) –1000, (**ग**) 350, (**घ**) 0, (**ङ**) 24, (**च**) 1920; **3.** (**क**) 0, (**ख**) 625000, (**ग**) 18700, (**घ**) 1876400, (**ङ**) –1534100,
(**च**) –480; **4.** 3 ×(–2) → –6, (–4) × (–5) → 20,
(–6) ×4 → –24, 7 × 5 → 35, (–8) × (–3) → 24, 5 × (–3) → –15 **5.** (**क**) 37,
(**ख**) -49, (**ग**) 0; **6.** (**क**) (iii), (**ख**) (i), (**ग**) (ii),
(**घ**) (iii); **7.** (i) ***असत्य***, (ii) ***सत्य***, (iii) ***सत्य***, (iv) ***सत्य***, (v) ***असत्य***, (vi) ***सत्य***,

अभ्यास 3 **(e)**

1. (**क**) –7, (**ख**) –4, (**ग**) 3, (**घ**) –5, (**च**) –3, (**छ**) 0, (**ज**) –144, (**त**) –125, (**थ**)

81, (द) –1051, (ध) –20, (न) –1; 22. (i) (ग) 27, (ii) (घ) –16, 3. 6 ´ 3 → 2, -12 ´ 6 →-2, 18 ´ -6 → -3, -21 ´ -7 → 3, 24 ´ 4 → 6, -25 ´ -5 → 5, -21 ´ 3 → --7, 28 ´ -7 → -4; **4.** (क) (ii) (ख) (iii) (ग) (i) (घ) (ii)।

अभ्यास 3 (f)

1. (i) 27, (ii) 114, (iii) 0, (iv) 3, (v) 0, (vi) 9, (vii) –15, (viii) –1, (ix) 23, (x) 13, (xi) × 8, (ख) 18 ÷ (4 + 2), (ग) 20 ÷ (6 – 2), (घ)(4 × 5) – 12 (ङ) 40 ÷ {(5 + 2) + 1}, (ढ) 3 × {(12 – 7) – 1}; **3.** (क) 26, (ख) –240, (ग) 11, (घ) 165, (ङ) 105, (च) 69, (छ) 0, (ज) 103, (झ) –430, (ट) 15, (ठ) 112.

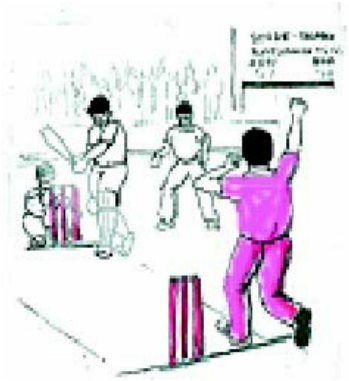
इकाई 4: सांख्यिकी

- *सांख्यिकीय आँकड़ों एवं उनकी विशेषताएँ*
- *आँकड़ों को एकत्र करना, व्यवस्थित करना तथा उनका वर्गीकरण करना*
- *अवर्गीकृत आँकड़ों की बारम्बारता सारणी बनाना*
- *अवर्गीकृत आँकड़ों के चित्र ग्राफ (पिक्टोग्राफ) बनाना*
- *अवर्गीकृत आँकड़ों के दण्ड आरेख (बारग्राफ) बनाना*
- *अवर्गीकृत आँकड़ों का मिश्रित दण्ड आरेख बनाना तथा उसकी व्याख्या करना*

4.1 भूमिका :

आपने टेलीविजन और समाचार पत्र में क्रिकेट का स्कोर बोर्ड अवश्य देखा होगा। इस स्कोर बोर्ड में पूरे खेल का ब्योरा दर्शाते हैं। खेल में कौन, कितने रन से जीता या हारा, इस सूचना के अतिरिक्त अन्य महत्वपूर्ण और अति उपयोगी सूचनाएँ भी प्राप्त होती हैं। खिलाड़ियों में किसने, कितने रन बनाए और सबसे अधिक रन बनाने वाले खिलाड़ी ने कितनी गेंदों में रन बनाए, कुल कितना समय लिया, आदि के बारे मे समाचार-पत्र में प्रकाशित एक क्रिकेट मैच का स्कोर बोर्ड नीचे दर्शाया गया है।

गेंदबाज	ओवर	मेडन ओवर	दिये गये रन	लिये गये विकेट
ब्रेकन	10	3	20	2
ब्रेटली	10	1	30	3
इशांत	10	2	25	2
मलिंगा	10	2	26	2
जानसन	10	1	32	1

बल्लेबाज	रन	खेली गई गेंदें	समय (मिनट में)
गम्भीर	65	40	55
सचिन	70	50	65
धोनी	50	48	60
संगकारा	62	50	67
गिलक्रिस्ट	55	60	70

आपकी कक्षा के शिक्षक द्वारा प्रतिदिन शिक्षार्थियों की उपस्थिति एक रजिस्टर में अंकित करते हुए तथा परीक्षा के बाद कक्षा के शिक्षार्थियों के द्वारा प्राप्त अंकों को भी एक रजिस्टर में अंकित करते हुए आपने अवश्य देखा होगा। प्रतिदिन समाचार पत्रों, पत्रिकाओं, टेलीविजन और अन्य संचार साधनों से विभिन्न प्रकार के आँकड़े प्रस्तुत किये जाते हैं। आप यह भी जानते हैं कि सभी आँकड़े हमें किसी न किसी प्रकार की सूचना अवश्य देते हैं।

इसी प्रकार आपने अपने दैनिक जीवन में संख्याओं की सारणी के रूप में वस्तु और उसके मूल्य, रेल के आने-जाने का समय तथा बस के आने-जाने के समय आदि को देखा होगा। ये सारणियाँ हमें आँकड़े **(DATA)** *उपलब्ध कराती हैं।*

आँकड़े संख्याओं के वे संग्रह हैं जो कुछ सूचनाएँ देने के लिए एकत्रित किए जाते हैं। किसी निश्चित उद्देश्य से आँकड़े एकत्रित किए जाते हैं।

4.2 ***आँकड़ों की विशेषताएँ***

सोचें, तर्क करें और निष्कर्ष निकालें -

- *हम जानते हैं कि किसी प्रदेश में प्रति हेक्टेयर गेंहूँ की उपज प्रतिवर्ष एक समान नहीं रहती है, बल्कि बढ़ या घट सकती है। इसी प्रकार एक प्रदेश में प्रति हेक्टेयर गेंहूँ की उपज और दूसरे प्रदेश में प्रति हेक्टेयर गेहूँ की उपज में अन्तर हो सकता है अर्थात् आँकड़े परिवर्तनशील होते हैं।*

- *एक दूसरा उदाहरण लेते हैं। मान लीजिए किसी कक्षा के एक छात्र के गणित, दूसरे छात्र के विज्ञान और तीसरे छात्र के अंग्रेजी विषय के प्राप्तांकों की तुलना करनी*

हैं, तो इससे कोई निष्कर्ष नहीं निकलेगा, किन्तु यदि तीनों छात्रों के द्वारा केवल किसी एक विषय, गणित, विज्ञान अथवा अंग्रेजी के प्राप्तांकों की तुलना करनी हो तो इससे यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि उस विषय में किस छात्र की उपलब्धि अच्छी है। इस प्रकार हम देखते हैं कि सजातीय आँकड़े होने पर ही हम किसी निष्कर्ष पर पहुँच सकते हैं।

- *मान लीजिए कि किसी कक्षा में छात्रों की ऊँचाई का अध्ययन करना है तो इसके लिए कक्षा के सभी छात्रों की ऊँचाई ज्ञात करनी होगी और तभी विश्लेषण करके कोई अनुमान या निष्कर्ष निकाल सकते हैं। एक छात्र की ऊँचाई अर्थात् केवल एक आँकड़े से तुलना नहीं कर सकते, तुलना के लिए आँकड़े सदैव समूह में होने चाहिए।*

- *जो तथ्य संख्याओं में व्यक्त नहीं किये जा सकते उनका अध्ययन सांख्यिकी के अन्तर्गत हम नहीं कर सकते, जैसे ईमानदारी, मित्रता, चरित्र आदि।*

निष्कर्ष :

आँकड़े परिवर्तनशील होते हैं। सजातीय आँकड़े होने पर ही तुलना करके निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। आँकड़े सदैव समूह में एकत्र किये जाते हैं। आँकड़े सदैव संख्यात्मक राशि में होते हैं।

4.5 आँकड़ों का संग्रह:

किसी समस्या के अध्ययन में अध्ययनकर्ता का सबसे पहला कार्य आँकड़ों का संग्रह करना है। आँकड़ों को इकट्ठा करने से पहले हमें यह जानना आवश्यक है कि हम इनका उपयोग किसके लिए करेंगे।

क्रियाकलाप :

अपनी कक्षा के शिक्षार्थियों के तीन समूह बनाइए। प्रत्येक समूह से निम्नांकित प्रकार

के आँकड़ों में से एक प्रकार के आँकड़ों को एकत्रित कीजिए :

(i)अपनी कक्षा के दस शिक्षार्थियों की ऊँचाई,

(ii)किसी दिन दिये गये गृहकार्य को करके लाने वाले शिक्षार्थियों की संख्या,

(iii)किसी एक माह में प्रत्येक कार्यदिवस में उपस्थित रहने वाले अपनी कक्षा के शिक्षार्थियों की संख्या।

प्रथम समूह के शिक्षार्थियों ने स्वयं आँकड़े एकत्र किये जैसे - शिक्षार्थियों की ऊँचाई ज्ञात करना, दूसरे समूह के शिक्षार्थियों ने दूसरे स्रोतों से आँकड़े एकत्र किये । जैसे- उपस्थित शिक्षार्थियों की संख्या अपनी कक्षा की उपस्थिति पंजिका से प्राप्त किये।

अतः आँकड़ों का साग्रंह दो प्रकार से किया जाता है :

(i)प्राथमिक स्रोतों से

(ii) द्वितीयक स्रोतों से

जिन स्रोतों से प्रथम बार आँकड़े एकत्र किये जाते हैं उन्हें प्राथमिक स्रोत कहते हैं तथा जिन स्रोतों से पहले से उपलब्ध आँकड़ों से काछित आँकड़े प्राप्त किये जाते हैं, वे द्वितीयक स्रोत कहलाते हैं ।

इस प्रकार आँकड़े भी दो प्रकार के होते हैं।

प्राथमिक आँकड़े :

जब कोई शोधकर्ता किसी उद्देश्य कोध्यान में रखकर स्वयं आँकड़ों को एकत्र करता है तो इन आँकड़ों को प्राथमिक आँकड़े कहा जाता है ।

द्वितीयक आँकड़े :

जब कोई शोधकर्ता किसी अन्य उद्देश्य से संकलित किये गये आँकड़ों को अपने प्रयोग में लाता है तो इन आँकड़ों को द्वितीयक आँकड़े कहा जाता है।

प्राथमिक स्त्रोतों से प्राप्त आँकड़ों को प्राथमिक आँकड़े कहा जाता है।

द्वितीयक स्रोतों से प्राप्त आँकड़ों को द्वितीयक आँकड़े कहा जाता है।

4.4 आँकड़ों का संकलन :

मात्र आँकड़ों के सा्रंह से हमें विशेष सूचना नहीं मिल सकती। अतः वांछित जानकारी प्राप्त करने के पहले यह जानना आवश्यक होता है कि आपको किस प्रकार के आँकड़ों की आवश्यकता है, प्राप्त आँकड़ों का उपयोग किस सूचना के लिए किया जायेगा, आदि।

आँकड़ों का संग्रह करने के बाद आँकड़ों को व्यवस्थित करने की भी आवश्यकता होती है, इसे समझने के लिए निम्नलिखित उदाहरण पर ध्यान दीजिए

गणित शिक्षिका कविता कक्षा-6 के चुने हुये 10 शिक्षार्थियों का गणित विषय में प्रदर्शन जानना चाहती थीं। कक्षाध्यापिका नमिता ने परीक्षा में प्राप्त अंकों की जो सूची कविता को दी उसमें अंक निम्न प्रकार से लिखे थे

38,42,45,40,30,50,48,26,27,32. इस रूप में लिखे अंकों से बच्चों का प्रदर्शन कैसा था? गणित शिक्षिका कोई निष्कर्ष नहीं निकाल सका; अतः कविता ने स्वयं अंकपत्र से अंकों को सारणी रूप में निम्नांकित प्रकार से लिखा

क्रसं.	नाम	50 में से प्राप्त अंक	क्रसं.	नाम	50 में से प्राप्त अंक
1.	आशीष	50	6.	सलमा	38
2.	अमिता	48	7.	रहमान	32
3.	मनीष	45	8.	अजय	30
4.	नीरज	42	9.	अरमान	27
5.	दीप्ति	40	10	नेहा	26

इस सारणी से कविता को यह सूचना मिल गई कि कक्षा में सबसे अच्छा प्रदर्शन किसका था। अन्य बच्चों में किसने कितने अंक प्राप्त किये, अच्छे प्रदर्शन के लिए किसे अधिक परिश्रम करने की आवश्यकता है, आदि।

इसे कीजिए :

अपने मित्रों से चर्चा कीजिए और अपनी कक्षा के 20 शिक्षार्थियों का भार कि्राम में तथा ऊँचाई मीटर में लिख कर निम्न प्रश्नों का उत्तर देने

का प्रयास कीजिए

1.***सबसे अधिक भार किसका है***?

2.***आपके और आपके मित्र के भार में कितना अन्तर है*** ?

3.***अधिकांश शिक्षार्थियों का भार कितना है*** ?

4.5 *आँकड़ों का अभिलेखन* :

एक कक्षा के* 20 *शिक्षार्थियों को दोपहर के भोजन के साथ मिठाई देने की योजना बनानी है। शिक्षक ने शिक्षार्थियों से चार प्रकार की मिठाइयों बर्फी, पेड़ा, गुलाबजामुन और जलेबी में से कोई एक मिठाई पसन्द करके बताने को कहा, सभी शिक्षार्थियों की मनपसन्द मिठाई की सूची बनाने का कार्य कक्षा नायक* (*मॉनीटर*) *दीपिका को दिया गया। दीपिका ने शिक्षार्थियों के नामों की सूची बनाई और उनके नाम के सामने उनके पसन्द की मिठाई का नाम लिख दिया।

यह सूची शिक्षार्थियों को उनके पसंद की मिठाई देने में सहायता करेगी ।

शिक्षार्थी का नाम	मिठाई का नाम	शिक्षार्थी का नाम	मिठाई का नाम
1 अमिता	बर्फी	11 साधना	गुलाबजामुन
2 अनुपमा	पेड़ा	12 सलमा	गुलाबजामुन
3 उमा	बर्फी	13 फातिमा	बर्फी
4 प्रीति	बर्फी	14 फरीदा	जलेबी
5 पूजा	गुलाबजामुन	15 रेशमा	जलेबी
6 अमर	बर्फी	16 राघव	गुलाबजामुन
7 रमन	पेड़ा	17 फैयाज	गुलाबजामुन
8 मनोज	पेड़ा	18 जावेद	बर्फी
9 अजमद	गुलाबजामुन	19 सतीश	गुलाबजामुन
10 राजू	पेड़ा	20 फहीम	गुलाबजामुन

कक्षा के शिक्षार्थियों को देने के लिए कितनी संख्या में बर्फी या पेड़े की आवश्यकता

होगी, यह जानने के लिए शिक्षक को नामों को एक-एक करके पढ़ कर बर्फी और पेड़ा की संख्या गिननी पड़ेगी। इसी प्रकार जलेबी और गुलाबजामुन की संख्या जानने के लिए इस प्रक्रिया को दोहराना पड़ेगा। सूची में शिक्षार्थियों की संख्या अधिक होने पर यह प्रक्रिया समय लेने वाली और जटिल हो सकती है।

दीपिका को एक नया उपाय सूझा। उसने कापी में चार चौकोर बॉक्स बनाए, फिर प्रत्येक बॉक्स के ऊपर एक मिठाई का नाम लिख दिया। उसने प्रत्येक शिक्षार्थी की पसन्द की मिठाई के नाम के अनुसार बॉक्स के अन्तर एक (•) चिह्न बना दिया। नामो की सूची के अनुसार निम्न प्रकार से चिह्न लग गये।

बर्फी	पेड़ा	गुलाबजामुन	जलेबी
• • • • • •	• • • •	• • • • • • • •	• •
6	4	8	2

दीपिका प्रत्येक बॉक्स के चिह्नों को गिनकर प्रत्येक मिठाई की संख्या बता सकती है।

इस क्रिया-कलाप को अपने 30 *सहपाठियों के लिए चार फलों या अन्य वस्तुओं को देने की योजना बनाने हेतु प्रयास कीजिए।*

दीपिका ने जो सूचनाएँ अपनी सूची से प्राप्त कीं, वही सूचनाएँ शिक्षक ने निम्नांकित सारणी द्वारा प्राप्त कर ली

शिक्षक द्वारा बनायी गई सारणी

बर्फी	√ √ √ √ √ √	6
पेड़ा	√ √ √	......
गुलाबजामुन	√ √ √ √ √ √ √ √	......
जलेबी	√ √	......

एक चिह्न (✓) *क्या सूचित करता है* ?

प्रयास कीजिए :

उपरोक्त सारणी को ध्यान से देखिए तथा निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

•एक चिह्न (✓) क्या सूचित करता है ?

•कितने शिक्षार्थियों ने पेड़ा पसन्द किया ?

•पेड़ा के सामने कितने चिह्न (✓) लगे हैं ?

•गुलाबजामुन कितने शिक्षार्थियों ने पसन्द किया ?

•किस मिठाई को सबसे कम लोगों ने पसन्द किया है ?

•कक्षा में कुल कितने शिक्षार्थी हैं ?

आँकड़े किस प्रकार एकत्र किये जा सकते हैं, आइए समझें।

एक छात्रावास में 64 छात्र रहते हैं। छात्रावास में प्रत्येक छात्र की रुचि का भोजन देने के लिए एक दिन की भोजन व्यवस्था बनानी है। यह कार्य मॉनीटर को दिया गया। मॉनीटर ने भोजन रुचियों के नाम एक स्तम्भ में लिख कर,फिर प्रत्येक छात्र से उसकी भोजन रुचि को पूछकर, उस रुचि के नाम के सामने एक खड़ी लकीर (।) अंकित कर अ।शंकित सारणी तैयार की ।

भोजन–रुचि	खींची गई लकीरें	लकीरों की संख्या
केवल रोटी	। । । । । । । । । । । ।	12
केवल चावल	। । । । ।	05
रोटी और चावल	। ।	21
पूड़ी	। । । । । । । । । । । । । । ।	15
परॉठा	। । । । । । । । । । ।	11

उपरोक्त सारणी को देखकर मनोज ने सुझाव दिया कि इन लकीरों को दस के समूह में रखने पर गिनना सरल हो जायेगा। अब दस-दस के समूह में लकीरें अंकित करके निम्नलिखित सारणी बनाई।

केवल रोटी	(1111111111) 11	12
केवल चावल	11111	05
रोटी और चावल	(1111111111) (1111111111) 1	21
पूड़ी	(1111111111) 11111	15
परॉठा	(1111111111) 1	11

इस सारणी को देखकर शिक्षक ने नया सुझाव दिया कि इन लकीरों को पाँच-पाँच के समूह में अंकित करना अधिक अच्छा होगा तथा पाँच-पाँच के प्रत्येक समूह में पाँचवी लकीर (चिह्न) को एक तिरछी रेखा के रूप में प्रयोग किया जाय। जैसा कि ~~||||~~ में दर्शाया गया है। इन लकीरों के चिह्नों को मिलान चिह्न (Tally Marks) कहते हैं। इस प्रकार ~~||||~~ ।। यह दर्शाता है कि गिनने पर पाँच और दो अर्थात् सात हैं, और ~~||||~~ ~~||||~~ ।। यह दर्शाता है कि पाँच-पाँच और दो अर्थात् बारह हैं।

टैली चिह्नों को पाँच-पाँच के समूह में लेने पर उपर्युक्त सारणी निम्नलिखित रूप में होगी -

भोजन–रूचि	टैली मार्क (मिलान चिन्ह)	विद्यार्थियों की संख्या
केवल रोटी	卌 卌 ||	12
केवल चावल	卌	05
रोटी और चावल	卌 卌 卌 卌 |	21
पूड़ी	卌 卌 卌	15
परॉठा	卌 卌 |	11

अब एक अन्य उदाहरण लेते हैं।

किसी मोहल्ले में 50 व्यक्तियों द्वारा पसन्द किए गये प्रिâजों के रंगों की सूचना मिलान चिह्नों का प्रयोग करके बनानी हैं।

इनके मिलान चिह्नों का प्रयोग करके निम्न सारणी तैयार की गई है : -

रंग	मिलान चिन्ह	फ्रिजों की संख्या
नीला	卌 ||	6
लाल	卌 卌 ||	12
क्रीम	卌 卌 ||||	14
स्लेटी	卌 卌 卌 |||	18

इस सारणी के द्वारा निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर दिया जा सकता है

1. लाल रंग का फ्रिज पसन्द करने वालों की संख्या कितनी है ? (12)
2. सबसे अधिक किस रंग का फ्रिज पसन्द किया गया ? (स्लेटी 18)
3. क्रीम रंग का फ्रिज कितने व्यक्तियों द्वारा पसंद किया गया ? (14)
4. सबसे कम किस रंग का फ्रिज पसंद किया गया ? (नीला 6)

इसी प्रकार के अन्य क्रियाकलाप मिलान चिह्नों के प्रयोग द्वारा किये जा सकते हैं।

4.6 आँकड़ों को व्यवस्थित करना :

मान लीजिए कक्षा 6 के 20 शिक्षार्थियों की अद्र्धवार्षिक परीक्षा में गणित विषय में 50 पूर्णांक में प्राप्तांकों का विवरण निम्नवत् है :

37, 23, 16, 30, 21, 27, 45, 42, 17, 25, 24, 22, 25, 28, 38, 26, 21, 32, 42, 28

1. यदि 17 या अधिक अंक प्राप्त करने वाले शिक्षार्थी को उत्तीर्ण माना जाय तो इन

प्राप्तांकों को देखकर क्या तुरंत यह बताया जा सकता है कि -

(i)*कितने शिक्षार्थी उत्तीर्ण हुए* ?

(ii)*कितने शिक्षार्थी अनुत्तीर्ण हुए* ?

(iii)*कितने शिक्षार्थियों ने तीस अथवा इससे अधिक अंक अर्जित किये हैं*?

ध्यान दीजिए कि मूल रूप में एकत्र किये गये आँकड़ों को देखकर इनसे सीधे कोई निष्कर्ष आसानी से प्राप्त नहीं किया जा सकता। प्रायः जिस मूलरूप में आँकड़े एकत्र किये जाते हैं, वे अव्यवस्थित होते हैं। ऐसे आँकड़ों को अपरिष्कृत अथवा अवर्गीकृत आँकड़े भी कहते हैं। उपर्युक्त उदाहरण में कक्षा 6 *के* 20 *शिक्षार्थियों के गणित विषय में प्राप्तांक जिस रूप में एकत्र किये गये हैं, वे अवर्गीकृत हैं। इनसे कोई निष्कर्ष प्राप्त करने के लिए सर्व प्रथम इनको व्यवस्थित करना होता है।*

आँकड़े मूल रूप में अव्यवस्थित होते हैं। इन्हें अवर्गीकृत आँकड़े अथवा कच्चे आँकड़े भी कहते हैं। इनसे कोई उद्देश्यगत निष्कर्ष प्राप्त करने के लिए सर्वप्रथम इनको व्यवस्थित करना पड़ता है।

अव्यवस्थित आँकड़ों को व्यवस्थित करने के लिए निम्नलिखित दो विधियों का प्रयोग करते हैं -

(i)*आँकड़ों को आरोही अथवा अवरोही क्रम में लिखना,*

(ii)*आँकड़ों का वर्गीकरण करना।*

आरोही क्रम :

आँकड़ों को आरोही क्रम में लिखने के लिए सर्व प्रथम सबसे छोटी संख्या लिखते हैं, उसके बाद उसके बराबर अथवा उससे ठीक बड़ी, फिर उससे ठीक बड़ी या बराबर ... और फिर सबसे अन्त में सबसे बड़ी संख्या लिखते हैं। यदि अव्यवस्थित आँकड़े बहुत अधिक नहीं हैं तो सावधानीपूर्वक देखकर इन्हें आरोही

क्रम में व्यवस्थित किया जा सकता है। जैसे उपर्युक्त उदाहरण में आँकड़ों की संख्या केवल 20 *है, अतः यदि हम चाहें तो इन आँकड़ों में से सावधानीपूर्वक क्रम से छोटी से बड़ी संख्या की ओर बढ़ते हुए इन संख्याओं को आरोही क्रम में निम्नवत् व्यवस्थित कर सकते हैं* -

16,17,21,21,22,23,24,25,25,26,27,

28,28,30,32,37,38,42,42,45

अवरोही क्रम :

यदि उपर्युक्त क्रम को उलट दिया जाय तो ये आँकड़े अवरोही क्रम में हो जाते हैं अर्थात् आँकड़ों को अवरोही क्रम में लिखने के लिए सर्वप्रथम सबसे बड़ी संख्या, फिर उसके बराबर अथवा उससे ठीक छोटी संख्या, फिर उसके बाद उससे ठीक छोटी संख्या... और फिरअन्त में सबसे छोटी संख्या लिखते हैं।

उपर्युक्त उदाहरण में दिये गये ऑकड़ों को अवरोही क्रम में निम्नवत् लिख सकते हैं -

45, 42, 42, 38, 37, 32, 30, 28, 28, 27, 26, 25, 25, 24, 23, 22, 21, 21, 17, 16.

इस प्रकार यदि आँकड़ों को आरोही अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित कर लिया जाय तो प्राप्तांकों के सम्बन्ध में जानकारी अधिक स्पष्ट और सुविधाजनक हो जाती है। जैसे, यदि 30 *से अधिक अंक प्राप्त करने वाले शिक्षार्थियों की संख्या ज्ञात करनी हो तो यह संख्या सुगमतापूर्वक ज्ञात की जा सकती है, साथ ही न्यूनतम और अधिकतम प्राप्तांक भी तुरंत ज्ञात किये जा सकते हैं।*

4.7 *वर्गीकरण :*

कभी-कभी आँकड़ों की संख्या इतनी अधिक होती है कि उन्हें आरोही अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने में काफी कठिनाई होती है। ऐसी स्थिति में हम आँकड़ों को निम्नलिखित दो प्रकार से वर्गीकृत करते हैं -

(i)*गुणों के आधार पर वर्गीकरण*

(ii)*वर्ग-अंतराल के आधार पर वर्गीकरण*

4.7.1 गुणों के आधार पर वर्गीकरण :

इस वर्गीकरण में वे सब आंकड़े जिनमें एक ही प्रकार के गुण होते हैं, एक वर्ग में रखे जाते हैं, जिनमें दूसरे गुण होते हैं, दूसरे वर्ग में रखे जाते हैं। उदाहरण के लिए भारत के विभिन्न प्रदेशों की जनसंख्या को हम उनके निवास स्थान के आधार पर दो वर्गों में बांट सकते हैं

(i) *ग्रामीण*

(ii) *नगर क्षेत्रीय*

प्रदेश	ग्रामीण	शहरी	योग

गुणात्मक आधार पर वर्गीकरण वह रीति है जिसमें संकलित आँकड़ों को उनकी समानता एवं असमानता के आधार पर विभिन्न वर्गों में बांट दिया जाता है।

4.7.2 वर्ग-अन्तराल के आधार पर वर्गीकरण

जब आँकड़ों की संख्या बहुत अधिक होती है और केवल गुणों के आधार पर इनका वर्गीकरण करने से अध्ययन के उद्देश्यों की पूर्ति नहीं होती तब संख्यात्मक सामग्री को अधिक प्रभावशाली तथा सांख्यिकीय गणना हेतु इन्हें अधिक उपयुक्त रूप में प्रस्तुत करने के लिए इन आँकड़ों को समूहों या वर्ग-अन्तरालों में रखकर भी व्यवस्थित करते हैं।

4.8 अवर्गीकृत आँकड़ों की सारणी बनाना :

शीघ्र निष्कर्ष निकालने के लिए आँकड़ों को व्यवस्थित किया जाता है। उदाहरण के लिए कक्षा 6 *के* 20 *शिक्षार्थियों के गणित प्रथम प्रश्न पत्र की परीक्षा के प्राप्तांक निम्नवत् हैं* : -

22, 26, 22, 38, 40, 40, 28, 28, 22, 16, 27, 27, 16, 22, 36, 38, 38, 16, 28, 26

हम जानते हैं कि इस रूप में दिये गये आँकड़ों को अपरिष्कृत या अवर्गीकृत आँकड़े कहते हैं। इन अवर्गीकृत आँकड़ों को देखकर कितने शिक्षार्थी उत्तीर्ण हुए, कितने अनुत्तीर्ण हुए, कितने प्रथम श्रेणी में उत्तीर्ण हुए आदि की जानकारी सरलता से नही की जा सकती है।

आँकड़ों को व्यवस्थित करने के लिए सर्वप्रथम उन्हें आरोही क्रम में रख सकते हैं। संख्याएँ अधिक होने पर केवल अवलोकन या निरीक्षण कर इन्हें आरोही क्रम में रखना सरल कार्य नहीं है, अतः इन्हें आरोही क्रम में रखने की सरल विधि नीचे दी गयी है।

उपर्युक्त आँकड़ों को आरोही क्रम में रखना

आँकड़े -

सबसे पहले प्राप्त अव्यवस्थित आँकड़ों में सबसे छोटी संख्या 16 ***और सबसे बड़ी संख्या*** 40 ***ज्ञात कर लीजिए। इससे यह जानकारी मिलती है कि इन आँकड़ों का फैलाव*** 16 ***से*** 40 ***तक है। अब ऊर्ध्वाधर रूप में क्रम से*** 16 ***से*** 40 ***तक की संख्याएँ लिखिए।***

16 । 21 26 । 31 36 ।

17 22 । । । । 27 । । 32 37

18 23 28 । । । 33 38 । । ।

19 24 29 34 39

20 25 30 35 40 । ।

अब अव्यवस्थित आँकड़ों में सबसे पहली संख्या देखिए, यह संख्या 22 *है।* *इसे यहाँ से काट दीजिए तथा क्रम से लिखी गयी संख्याओं में* 22 *के समक्ष टैली* '।' *का चिह्न लगा दीजिए।* *अव्यवस्थित आँकड़ों की दूसरी संख्या* 26 *को काटकर क्रम से लिखी संख्या में* 26 *के सामने* '।' *टैली चिह्न लगाइए।* *इसी प्रकार प्रक्रिया को आगे बढ़ाइए।* *यदि प्राप्त आँकड़ों में कोई संख्या दो या अधिक बार दोहराई गई है तो वह संख्या जितनी बार दोहराई गई है, उतनी टैली चिह्न संगत संख्या के सम्मुख लगा दीजिए।* *उदाहरण के लिए* 26 *के सामने दो टैली चिह्न और*28 *के सामने तीन टैली चिह्न लगाइए।* *इस प्रकार अव्यवस्थित आँकड़ों मेंअन्तिम संख्या तक के टैली चिह्न लगाइए।* *इसके पश्चात् ऊध्र्वाधर रूप में लिखी संख्याओं को बढ़ते क्रम में निम्नवत् लिख दीजिए।ध्यान रहे कि जिस संख्या के सामने जितने टैली चिह्न लगे हैं, वे यहाँ उतनी ही बार लिखी जायेंगी।*

16,16,16,22,22,22,22,26,26,27,27,28,28,28,

36,38,38,38,40,40

यही आँकड़ों का आरोही क्रम है।

इसी प्रकार संख्याओं को क्रम से ऊध्र्वाधर रूप में 40 *से* 16 *तक घटते क्रम में लिखकर आँकड़ों का अवरोही क्रम ज्ञात किया जा सकता है।*

इस रूप में रखे गये आँकड़ों को व्यवस्थित या सारणीबद्ध आँकड़े कहते हैं। *इस रूप में रखे गये आँकड़ों से सुविधाजनक तथा स्पष्ट रूप में जानकारी मिल सकती है।* *जैसे सबसे कम प्राप्तांक* 16 *है,* 17 *से कम प्राप्तांक वाले* 3 *शिक्षार्थी,* 35 *से अधिक प्राप्तांक* 6 *शिक्षार्थियों के हैं, आदि।*

अभ्यास **4(a)**

1.*किसी मुहल्ले में* 10 *परिवारों में सदस्यों की संख्या निम्नवत् ज्ञात की गई* :

6, 8, 3, 2, 4, 5, 9, 7, 3, 6.

आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए।

2.*निम्नलिखित आँकड़ों को आरोही क्रम में रखिए* :

4, 6, 8, 2, 12, 22, 29, 23, 25, 24, 32, 37, 42, 44, 9.

3.*किसी कक्षा की* 10 ***बालिकाओं के प्राप्तांकों का प्रतिशत निम्नवत् है*** :

67, 55, 57, 42, 73, 75, 62, 61, 74, 33. ***आँकड़ों को अवरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए*** ।

4. ***एक ग्राम सभा में मनरेगा योजनान्तर्गत*** 20 ***व्यक्तियों*** (***जाब कार्डधारकों***) ***द्वारा एक माह में किये गये कार्य के दिनों की संख्या प्रति व्यक्ति निम्नवत् है*** । ***इन आँकड़ो को अवरोही-क्रम में लिख ज्ञात कीजिए कि कितने व्यक्तियों ने***10 ***दिनों से कम काम किये*** ।

11, 8, 12, 12, 19, 16, 17, 24, 25, 21, 9, 11, 8, 12, 15, 9, 16, 8, 7, 3

4.8.1 *बारम्बारता बंटन सारणी*

पृष्ठ 76 ***के सारणीबद्ध कक्षा*** 6 ***के*** 20 ***शिक्षार्थियों के गणित प्रश्नपत्र के आँकड़ों को समझना भी थोड़ा कठिन कार्य है, इन्हें स्पष्ट और सुगम बनाने के लिए सारणी को निम्नलिखित रूप में रख सकते हैं***

***सारणी*-1**

<table>
<tr><th>प्राप्तांक</th><th>मिलान चिह्न</th><th>शिक्षार्थियों की संख्या</th></tr>
<tr><td>16</td><td>|||</td><td>3</td></tr>
<tr><td>22</td><td>||||</td><td>4</td></tr>
<tr><td>26</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>27</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>28</td><td>|||</td><td>3</td></tr>
<tr><td>36</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td>38</td><td>|||</td><td>3</td></tr>
<tr><td>40</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>योग</td><td></td><td>**20**</td></tr>
</table>

इस सारणी में प्रत्येक प्राप्तांक के सामने उन शिक्षार्थियों की संख्या दी गई है जिन्होंने उस अंक को प्राप्त किया है। जैसे 3 *शिक्षार्थियों ने* 16 *अंक प्राप्त किये हैं,* 4 *शिक्षार्थियों के प्राप्तांक* 22 *हैं, आदि।*

सारणी से यह भी स्पष्ट है कि ये प्राप्तांक 16 *से* 40 *के मध्य फैले हुए हैं। ये प्राप्तांक चर राशि कहलाते हैं।*

उस राशि को जिसे हम अलग-अलग प्रेक्षण में माप सकते हैं। चर राशि कहते हैं।

उपर्युक्त सारणी में अंकों को प्राप्त करने वाले शिक्षार्थियों की संख्या दी गई है। जैसे 26 *प्राप्तांक* 2 *शिक्षार्थियों के हैं,* 28 *प्राप्तांक* 3 *शिक्षार्थियों के हैं, आदि। अंकों की बारम्बारता से यह पता चल जाता है कि अंक विशेष कितनी बार दोहराया गया है। बारम्बारता वह संख्या है जिससे यह पता चलता है कि आँकड़ों में कोई संख्या विशेष कितनी बार दोहराई गई है।*

इस प्रकार ऊपर दी गई सारणी को अवर्गीकृत आँकड़ों की बारम्बारता बंटन सारणी अथवा बारम्बारता सारणी कहा जाता है।

निष्कर्ष :

अव्यवस्थित आँकड़ों को व्यवस्थित रूप में रखने पर आँकड़ों को सारणीबद्ध आँकड़े कहते हैं।
उस राशि को जिसे हम अलग-अलग प्रेक्षण में माप सकते हैं, चर राशि कहते हैं।
किसी संख्या की बारम्बारता वह संख्या है जिससे यह पता चलता है कि आँकड़ों में वह संख्या कितनी बार दोहराई गई है
आँकड़ों को सारणीबद्ध कर उनकी बारम्बारता के साथ प्रस्तुत करने को बारम्बारता बंटन कहते हैं।

4.8.2 *बारम्बारता सारणी बनाना* :

***उदाहरण* 1:**

किसी शहर का एक माह के 30 *दिनों का न्यूनतम तापमान* °C *में निम्नवत् हैं* :

10.6 10.6 10.4 10.6 10.2 10.2

10.7 10.7 10.7 10.8 10.7 10.7

10.9 10.8 10.9 10.9 10.5 10.3

10.3 10.5 10.5 10.5 10.6 10.6

10.2 10.2 10.3 10.2 10.2 10.2

आँकड़ों की बारम्बारता सारणी बनाइए।

बारम्बारता सारणी बनाने के सोपान निम्नवत् हैं

1. *इसके लिए प्रारम्भ में सारणी का प्रारूप या रूपरेखा बनाइए*। *सारणी के प्रारूप में चार स्तम्भ होंगे, जिसमें पहला स्तम्भ क्रम संख्या के लिए, दूसरा स्तम्भ तापमान के लिए तथा तीसरा व चौथा स्तम्भ क्रमश: टैली चिह्न व बारम्बारता के लिए हैं*। *स्तम्भों के क्रमांक* 1,2,3,4 *लिखिए*।

सारणी-2

(1)	(2)	(3)	(4)
क्रम संख्या	तापमान (°C)	टैली चिह्न	बारम्बारता
1	10.2	卌 ||	7
2	10.3	|||	3
3	10.4	|	1
4	10.5	||||	4
5	10.6	卌	5
6	10.7	卌	5
7	10.8	||	2
8	10.9	|||	3
			30

2. *आँकड़ों में तापमानों का परिसर* 10.2 *से*10.9 *तक है*। *अतएव हमारे पास* 10.2 *से*

10.9 *तक कुल* 8*संख्याएँ हैं। अब स्तम्भ* 1*में* 1 *से* 8 *तक की क्रम संख्या लिखिए।*

3.*स्तम्भ* 2 *में तापमान को आरोही क्रम में लिखिए।*

4.*स्तम्भ* 3 *में विभिन्न दिनों के तापमान का टैली चिह्न लगाइए। यह टैली चिह्न एक खड़ी रेखा ' ।' होती है। टैली चिह्न लगाने के लिए निम्नलिखित प्रक्रिया का पालन कीजिए।*

(i)*आँकड़ों में पहला तापमान*10.6 *है। अत: सारणी के स्तम्भ* 3 *में* 10.6 *के सामने एक टैली चिह्न* (।) *लगाते हैं।*

(ii)*आँकड़ों में दूसरा तापमान भी*10.6 *है। अत: पुन: स्तम्भ* 3 *में* 10.6*के सामने एक टैली चिह्न और लगाते हैं।*

(iii)*जब किसी तापमान के सामने चार टैली चिह्न हो जाते हैं तो पाँचवें तापमान के लिए और टैली चिह्न न लगाकर पहले के चार टैली चिह्न को तिर्यक रेखा द्वारा* (~~||||~~) *अथवा* (~~||||~~) *प्रकार से काट दिया जाता है। इस समूह को पॉच गिना जाता है। इसके बाद पुन: आगे के समूह एक-एक टैली लगाकर बनाए जाते हैं जैसे, तापमान* 10.2 *के लिए एक समूह पाँच का तथा दो अतिरिक्त टैली हैं।*

(iv)*टैली चिह्न लगाने का कार्य पूरा हो जाने पर उनकी संख्या को गिनकर प्राप्त संख्या को बारम्बारता के स्तम्भ* 4 *में लिखिए। संख्याओं की बारम्बारता का योग कुल संख्याओं के योग के बराबर होता है। उपर्युक्त उदाहरण मे बारम्बारता का योग* 30 *है, जबकि आँकड़े भी तीस दिन के तापमान के हैं। उक्त सारणी अवर्गीकृत आँकड़ों का बारम्बारता बंटन प्रदर्शित करती है।*

उपर्युक्त उदाहरण में केवल 30 *दिन के तापमान का अभिलेख रखकर बारम्बारता सारणी बनायी गयी है। किन्तु आंकड़े यदि बहुत अधिक हों तो अवर्गीकृत बारम्बारता सारणी बनाना अत्यन्त कठिन कार्य है। अत: अवर्गीकृत के स्थान पर वर्गीकृत बारम्बारता सारणी बनाना अधिक उपयुक्त होता है।*

***उदाहरण* 2: *निम्नलिखित आंकड़ों से टैली चिह्न लगाकर, संख्याओं की बारम्बारता सारणी बनाइए*।**

6, 7, 9,14, 9,15, 9,12,15,14,9,12, 14, 15,7,6,12,14,6,9

***हल*:**

बारम्बारता सारणी

क्रम	संख्या	टैली चिह्न	बारम्बारता
1	6	III	3
2	7	II	2
3	9	~~IIII~~	5
4	12	III	3
5	14	IIII	4
6	15	III	3

*अभ्यास*4(b)

1. *निम्नलिखित आँकड़ों से टैली चिह्न लगाकर संख्याओं की बारम्बारता ज्ञात कीजिए*।

5, 6, 8, 13, 8, 5, 14, 11, 9, 13, 8, 11, 11, 6, 5.

2. *टैली चिह्न लगाकर निम्नांकित संख्याओं की बारम्बारता सारणी बनाइए* :

(i) 5, 2, 3, 4, 5, 3, 2, 4, 5, 4, 3, 2, 5, 5.

(ii) 16, 15, 16, 12, 13, 15, 14, 16, 13, 15, 12, 15

4.9 *आँकड़ों का चित्रारेख या पिक्टोग्राफ द्वारा प्रदर्शन* :

***हमारे दैनिक जीवन में प्राय*: *विभिन्न प्रकार के आँकड़े सुनने और पढ़ने में आते हैं*। *जैसे भारत की जनसंख्या वर्ष* 2011 *की जनगणना के अनुसार* 121.05 *करोड़ से अधिक हो गयी है*। *यहाँ की* 67% *जनसंख्या खेती से जुड़ी है*। *भारत का क्षेत्रफल विश्व का मात्र* 2.4% *है जबकि यहाँ विश्व की* 17.5% *से अधिक जनसंख्या निवास करती है*।**

2011 की जनगणना के आधार पर भारत में कुल 73% प्रतिशत व्यक्ति साक्षर है जिसमें महिलाओं की साक्षरता की दर 64.9% तथा पुरुषों की 80.9% है।

भविष्य में सभी के लिए भोजन, वस्त्र, आवास, पेयजल, चिकित्सा, शिक्षा तथा रोजगार आदि की समुचित व्यवस्था करना आवश्यक है। इन सबके लिए एक सुविचारित योजना बनानी होगी। नीति निर्धारिण के लिए आँकड़े संकलित किये जाते हैं। इन आँकड़ों को वैâसे प्रदर्शित कर सकते हैं?

सामान्य रूप से आँकड़ों का आरेखीय निरूपण किया जाता है। इस प्रकार के प्रदर्शन को चित्रारेख प्रदर्शन अथवा पिक्टोग्राफ कहते हैं।

चित्रारेख :

एक आलमारी में पाँच खाने हैं, प्रत्येक खाने में पुस्तकें एक पंक्तिबद्ध रूप में रखी हैं। विस्तृत जानकारी निम्न प्रकार सूचित की गई है :

चित्र (1)

प्रयास कीजिए :

• किस पंक्ति में पुस्तकों की संख्या सबसे अधिक है?

•किस पंक्ति में पुस्तकों की संख्या सबसे कम है?

•किस पंक्ति में तीन पुस्तकें हैं?

आप उपरोक्त आरेख देखकर ही इन प्रश्नों के उत्तर दे सकते हैं। इसमें प्रयुक्त चित्र आँकड़ों को समझने में सहायता करते हैं।

एक चित्रारेख आँकड़ों को चित्रों, वस्तुओं या वस्तुओं के भागों के रूप में निरूपित करता है। इसको केवल देखकर ही आँकड़ों से सम्बन्धित प्रश्नों के उत्तर दिये जा सकते हैं।

आँकड़ों के चित्रों द्वारा प्रदर्शन को चित्रारेख या पिक्टोग्राफ (PICTOGRAPH) कहते हैं।

इन्हें कीजिए :

समाचार पत्रों और पत्रिकाओं में प्रकाशित चित्रारेखों को एकत्र कीजिए। यह समझने का प्रयत्न कीजिए कि ये चित्रारेख क्या दर्शाते हैं।

उदाहरण 3: किसी कक्षा के 30 विद्यार्थियों से उनके प्रतिदिन स्कूल आने के साधन के सम्बन्ध में जानकारी प्राप्त की गई। प्राप्त सूचना को पिक्टोग्राफ द्वारा प्रदर्शित किया गया हैं।

मोटर साइकिल	सार्वजनिक बस	स्कूल बस	साइकिल	पैदल
3	4	10	6	7

चित्र (2)

यातायात का साधन	विद्यार्थियों की संख्या (= 1 विद्यार्थी)
मोटर साइकिल	
सार्वजनिक बस	
स्कूल बस	
साइकिल	
पैदल	

इस चित्रालेख से निम्नलिखित निष्कर्ष निकाल सकते हैं।

(i) साइकिल का प्रयोग केवल 6 विद्यार्थी करते हैं।

(ii)*अधिकतम विद्यार्थी स्कूल बस से स्कूल जाते हैं।*

यह सर्वाधिक लोकप्रिय यातायात का साधन है।

(iii)*मोटर साइकिल से आने वाले विद्यार्थियों की संख्या* 3 *है।*

(iv)*पैदल स्कूल आने वाले विद्यार्थियों की संख्या* 7 *है।*

इसी प्रकार अन्य साधनों की सूचना ज्ञात की जा सकती है।

प्रयास कीजिए :

वन महोत्सव सप्ताह के अवसर पर नेहा द्वारा अपने विद्यालय में रोपे गये पौधे निम्नांकित हैं:

दिन	पौधों की संख्या
रविवार	4
सोमवार	6
मंगलवार	8
बुधवार	3
गुरूवार	5
शुक्रवार	10
शनिवार	2

आँकड़ों का निरूपण पिक्टोग्राफ द्वारा कीजिए।

पिक्टोग्राफ बनाने के लिए बिन्दु :

1. *आँकड़ों का पिक्टोग्राफ द्वारा निरूपण करने के लिए सबसे पहले दिनों के नाम क्रम से ऊध्र्वाधर रूप में लिख लीजिए।*

रविवार	
सोमवार	
मंगलवार	
बुधवार	
गुरुवार	
शुक्रवार	
शनिवार	

चित्र 3 वन महोत्सव पर लगाये गये पौधों का पिक्टोग्राफ

2.*एक बड़ी आयताकार आकृति में दिनों के लिए पंक्तियाँ बनाइये।*

3.*एक उपयुक्त पैमाना* = 1 *पौधा लेकर प्रत्येक दिन के सामने लगाये गये पौधों की संख्या के बराबर चित्र बनाइए।*

ऊपर या नीचे पिक्टोग्राफ का शीर्षक लिख दीजिए।

यहाँ पर एक पौधे के लिए एक चित्र बनाया गया है, किन्तु बड़ी संख्याओं के लिए एक उपयुक्त पैमाना मानकर पिक्टोग्राफ बनाया जाता है।

उदाहरण4 : एक उद्यान में विभिन्न प्रजाति के पूâलों के पौधे लगाए गए हैं। नीचे दी गई सारणी में इन पौधों की संख्या दी गई है -

गुलाब	गेंदा	जूही	डहेलिया	रजनीगंधा
300	250	100	150	450

इन आँकड़ों को पिक्टोıराफ द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

हल :

यहाँ पर पौधों की संख्या अधिक है। अतः कोई उपयुक्त पैमाना मान लेते हैं।

पैमाना : = 50 *पौधे*

गुलाब	✿ ✿ ✿ ✿ ✿ ✿
गेंदा	✿ ✿ ✿ ✿ ✿
जूही	✿ ✿
डहेलिया	✿ ✿ ✿
रजनीगंधा	✿ ✿ ✿ ✿ ✿ ✿ ✿ ✿ ✿

उपर्युक्त चित्रारेख में गुलाब के 300 *पौधों के लिए* $\frac{300}{50} = 6$ *फूल दर्शाये गये हैं। इसी प्रकार गेंदा के* $\frac{250}{50} = 5$ *फूल दर्शाये गये हैं। जूही के* 100 *पौधों के लिए दो पूâल हैं। अब आप अनुमान लगा सकते हैं कि डहेलिया और रजनीगंधा के सामने दर्शाये गये तीन और नौ फूल कितने-कितने वास्तविक फूलों के पौधों की संख्या प्रदर्शित करते हैं।*

अभ्यास 4(c)

1. *रमेश की दुकान पर मार्च से अगस्त तक बेचे गये पंखों की संख्या सारणी में दी गई है* :

मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त
30	50	60	70	50	40

आँकड़ों को पिक्टोग्राफ द्वारा प्रदर्शित कीजिए जबकि एक ⚑ = 10 *पंखे*

2. *किसी सप्ताह के विभिन्न दिनों में बेंची गयीं घड़ियों की संख्या नीचे दर्शाई गई है* : -

🕐 =1 *घड़ी*

चित्रारेख को देखकर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i). *किस दिन बेची गई घड़ियों की संख्या अधिकतम है* ?

(ii).*मंगलवार को कितनी घड़ियाँ बेची गई* ?

(iii).*पूरे सप्ताह में कुल कितनी घड़ियाँ बेची गई* ?

(iv).*यदि एक घड़ी* 200 *रुपये में बेची गई हो तो रविवार को कुल कितने रुपये की बक्रिी हुई* ?

(v).*किस दिन घड़ियों की बक्रिी सबसे कम हुई और कितनी हुई* ?

3.*नीचे दी गयी सारणी में विभिन्न खेलों में रुचि रखने वाले किसी विद्यालय के शिक्षार्थियों की संख्या दी गई हैः*

खेल	फुटबाल	हाकी	किक्रेट	कबड्डी	शतरंज
शिक्षार्थियों की संख्या	200	140	100	80	20

आंकड़ों को चित्रारेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए :

संकेत ☺ **=20 *शिक्षार्थी***

4.*एक सप्ताह में* 35 ***शिक्षार्थियों वाली एक कक्षा में उपस्थित रहने वाले शिक्षार्थियो की संख्या निम्न चित्रारेख द्वारा विस्तृत रूप से दर्शाई गई है*** :

(i).*मंगलवार को कितने शिक्षार्थी उपस्थित थे* ?

(ii).*किस दिन पूर्ण उपस्थिति थी* ?

(iii).*किस दिन सबसे कम शिक्षार्थी उपस्थित थे* ?

(iv).*बुधवार को कितने शिक्षार्थी उपस्थित थे* ?

5.*विभिन्न वर्षों में एक विद्यालय के शिक्षार्थियों की कुल संख्या निम्नलिखित सारणी द्वारा प्रदर्शित हैं* :

वर्ष	2000	2002	2004	2006	2008
शिक्षार्थियों की संख्या	400	500	700	600	800

एक संकेत =100*शिक्षार्थी लेकर एक चित्रारेख बनाइए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए* :

(i).*वर्ष* 2000 *में कुल शिक्षार्थियों को कितने संकेत निरूपित कर रहे हैं*?

(ii).*वर्ष* 2006 *में कुल शिक्षार्थियों के लिये कितने संकेत प्रयुक्त हुए* ?

(iii). *यदि एक संकेत* =50 *शिक्षार्थी निरूपित करता हो, तो एक अन्य चित्रारेख बनाइए* ।

4.10 *दंड आरेख*

आँकड़ों को चित्रारेखों द्वारा निरूपित करने में समय अधिक लगता है और उसे बनाने में कठिनाई भी होती है। इसके अतिरिक्त आकर्षक चित्र भी बनाना कठिन कार्य है। अतः आँकड़ों को निरूपित करने के लिए कोई अन्य चित्रीय विधि प्रयोग कर सकते है। प्रतीक चित्रों के स्थान पर एक अन्य विधि में दण्डारेख का प्रयोग करते हैं। दण्डारेख में एक समान चौड़ाई के क्षैतिज या ऊध्र्वाधर दंड **(bars)** *खींचे जाते हैं, जिनके बीच की दूरी समान रखी जाती है। इस प्रकार खींचे गए प्रत्येक दंड की लम्बाई दी हुई संख्या* (*मान*) *को निरूपित करती है। आँकड़ों को प्रस्तुत करने का यह चित्रीय निरूपण दंड आरेख*(**bar diagram**) *या दंड आलेख* (**bargraph**)*कहलाता है*।

4.10.1 *दण्ड आरेख को खींचना*

आएये इसे एक उदाहरण के माध्यम से समझते हैं।

कक्षा ६ के छः विद्यार्थियों द्वारा पूर्णांक ६०० में से प्राप्त किये गये कुल अंकों को दर्शाते हैं, इन्हें एक दण्ड आरेख द्वारा निरूपित कीजिए।

शिक्षार्थी	अमिता	नमिता	दीप्ति	अजय	अमर	नाजिया
प्राप्तांक	450	300	400	350	500	550

अभ्यास पुस्तिका पर समकोण पर काटती हुई एक क्षैतिज रेखा दें और एक ऊध्वाधर रेखा दब् खींचिए। रेखा दें पर शिक्षार्थियों के नाम अंकित कीजिए और ऊध्वाधर रेखा दब् पर प्राप्तांक को दर्शाते हैं। यदि हम १ सेमी · १० अंक निरूपित करें तो दण्ड आरेख अभ्यास पुस्तिका पर नहीं खींचा जा सकेगा। उपयुक्त पैमाने के लिए ऊध्वाधर अक्ष पर १ सेमी · १०० अंक निरूपित कर सकते हैं।

ध्यान दीजिए कि आँकड़ों में शिक्षार्थियों को ऊध्वाधर-अक्ष पर और प्राप्त अंकों को क्षैतिज दिशा में अंकित करके दंड क्षैतिज दिशा में खींचकर भी निरूपित किया जा सकता है। परन्तु सामान्यत: ऊध्वाधर दण्ड अधिक पसन्द किए जाते हैं।

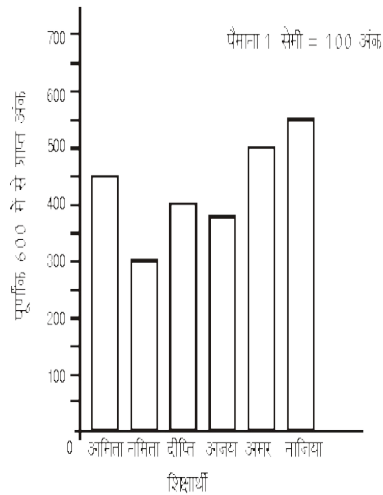
*उदाहरण*5 : *निम्नलिखित आँकड़े किसी कक्षा के छ: शिक्षार्थियों द्वारा पूर्णांक* 600 *में से प्राप्त किये गये कुल अंकों को दर्शाते हैं, इन्हें एक दंड आरेख द्वारा निरूपित कीजिए।*

शिक्षार्थी	अमिता	नमिता	दीप्ति	अजय	अमर	नाजिया
प्राप्तांक	450	300	400	350	500	550

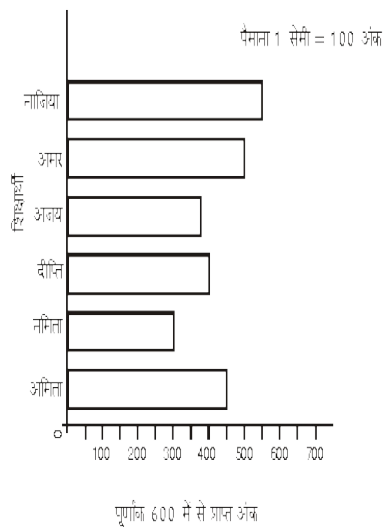
हल :

यदि हम 1 *सेमी* =10 *अंक निरूपित करें, तो दंड आरेख अभ्यास पुस्तिका पर नही खींचा जा सकेगा।*

एक उपयुक्त स्केल के लिए, हम ऊध्वाधर अक्ष पर 1 *सेमी* =100 *अंक निरूपित कर सकते हैं।*

आँकड़ों का दंड आरेख :

चित्र - 5

ध्यान दीजिए कि आँकड़ों में शिक्षार्थियों को ऊर्ध्वाधर अक्ष पर और प्राप्त अंकों को क्षैतिज दिशा में अंकित करके दंड क्षैतिज दिशा में खींचकर भी निरूपित किया जा सकता है। परन्तु सामान्यत: ऊर्ध्वाधर दंड आरेख अधिक पसन्द किए जाते हैं।

4.10.2 *क्षैतिज दिशा में खींचा गया दंड आरेख*

चित्र - 6

इस प्रकार हमने देखा कि दंड आरेख, सांख्यिकीय आँकड़ों का एक आधार-रेखा पर समान दूरी में बने बराबर चौड़ाई वाले क्षैतिज अथवा ऊर्ध्वाधर दंडों द्वारा चित्रमय निरूपण है। प्रत्येक दंड की ऊँचाई या लम्बाई, किसी उपयुक्त पैमाने पर केवल एक

सांख्यिकीय आँकड़े का मान निरूपित करती है।

इन्हें कीजिए

कक्षा में छात्रों के साथ चर्चा कीजिए और किसी खेल, अनाज की पैदावार, साक्षरता दर के आँकड़े प्राप्त कीजिए। आँकड़ों से सारणियाँ बनाकर उन्हें दण्ड आरेखों द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

ध्यान दीजिए :

दंड आरेख खींचते समय निम्नलिखित नियमों को ध्यान में रखना चाहिए :

1. *दंड आरेख की विषयवस्तु को ग्राफ के ऊपर एक शीर्षक के रूप में लिखना चाहिए।*

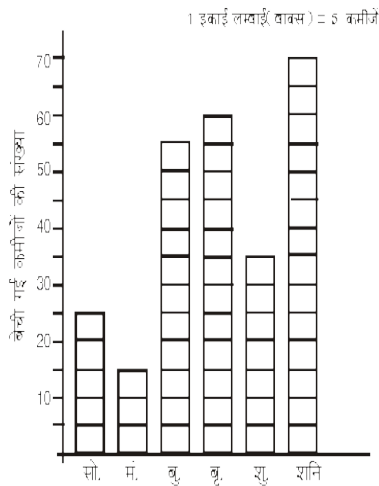
2. *ग्राफ में पैमाना अवश्य लिखना चाहिए। पैमाना ऐसा होना चाहिए जिससे आकार न तो बहुत बड़ा हो और न ही इतना छोटा कि चित्र की स्पष्टता नष्ट हो जाये।*

3. *सभी दंडों की चौड़ाई बराबर होनी चाहिए।*

4. *दंडों के बीच की दूरी समान होनी चाहिए।*

5. *प्रत्येक दंड एक ही आधार पर होना चाहिए।*

4.10.3 *दंड आरेख की व्यवस्था*

आइए एक रेडीमेड कपड़ों की दुकान में सोमवार से शनिवार तक कमीज की बिक्री का अध्ययन करें। नीचे दिए दंड आरेख में कमीज की बिक्री दर्शाई गई है। एक इकाई **(unit)** *को सांकेतिक रूप से एक बाक्स से निरूपित किया गया है।*

***चित्र* (7)**

अब निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर दीजिए :

1.***कमीजों की संख्या को निरूपित करने के लिए ऊर्ध्वाधर रेखा पर क्या पैमाना लिया गया है*** ?

2.***किस दिन अधिकतम कमीजें बेची गयां***r ?

3.***किस दिन न्यूनतम संख्या में कमीजें बेची गयीं*** ?

4.***बृहस्पतिवार को कितनी कमीजें बेची गयीं*** ?

***उत्तर* :**

1. 1 *इकाई* (***बाक्स***) =5***कमीज*** 2. ***शनिवार***, 70 3. ***मंगलवार***, 15 4. 60

जब आँकड़ों में संख्याएँ बड़ी हों, तो एक अलग पैमाने की आवश्यकता पड़ती है । ***उदाहरण के लिए भारत की जनसंख्या की स्थिति को लेते हैं*** । ***ये संख्या करोड़ों में है, अत*: *एक उपयुक्त पैमाना चुनना होगा जैसे कि*** 1***इकाई*** =10 ***करोड़ जनसंख्या*** ।

4.10.4 *दंड आरेखों को पढ़ना* :

किसी दंड आरेख को पढ़ने के लिए कुछ बिन्दुओं पर पूरी सावधानी से विशेषध्यान

देना होगा। उदाहरण के लिए चित्र (7) *के दंड आरेख को पढ़ने पर हम पाते हैं कि* -

(i) *दंड आरेख किसी सप्ताह में सोमवार से शनिवार तक कमीजों की बिक्री की संख्या दिखाता है।*

(ii)*दिन सोमवार से शनिवार एक क्षैतिज रेखा पर दिखाए गए हैं और एक उपयुक्त पैमाना मान कर कमीजों*

की बिक्री उर्ध्वाधर रेखा पर दिखाई गई है।

(iii)*किसी दंड की ऊँचाई, उस दंड के संगत दिन में कमीजों की बिक्री की संख्या इंगित करती है।*

4.10.5 ***दंड आरेख का अर्थ बताना :***

किसी दिए गए दंड आरेख का अर्थ बताने का तात्पर्य इससे निष्कर्ष निकालने से होता है। चित्र (4)*के दंड आरेख से निम्नलिखित निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं* -

(i)*दंड आरेख किसी सप्ताह में सोमवार से शनिवार तक बिक्री किये गये कमीज की संख्या को बताता है।*

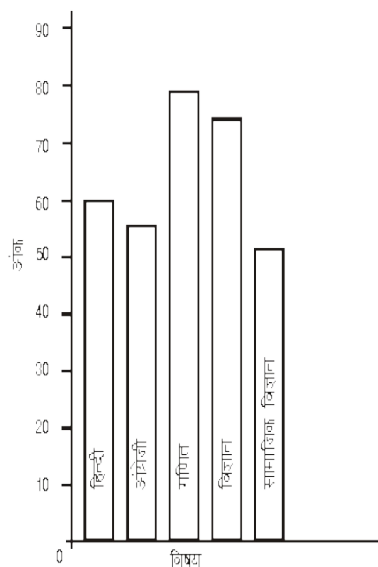
(ii) *सबसे लंबा दंड अधिकतम बेची गई कमीजों की संख्या को दर्शाता है।*

(iii)*सबसे छोटा दंड संख्या* 15 *के संगत है।*

(iv) *किसी विशेष दिन बेची गई कमीजों की संख्या कितनी है* ?

इस प्रकार दंड आरेख दिए गए आँकड़ों को सरलता से समझने में सहायक होते हैं और केवल आरेख देखकर ही निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं।

*अभ्यास*4(d)

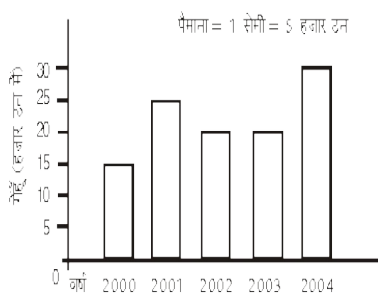
1.

उपर्युक्त दंड आरेख को देखिए जो मोहित द्वारा वार्षिक परीक्षा में विभिन्न विषयों में प्राप्त किए गए अंकों को प्रदर्शित करता है ।

(i).***यह दंड आरेख क्या सूचना प्रदर्शित करता है*** ?

(ii).***किस विषय में मोहित ने अधिकतम अंक प्राप्त किए*** ?

(iii).***किस विषय में न्यूनतम अंक प्राप्त किए*** ?

(iv).***प्रत्येक विषय के नाम और उन विषयों में प्राप्त किए गए अंक भी लिखिए*** ।

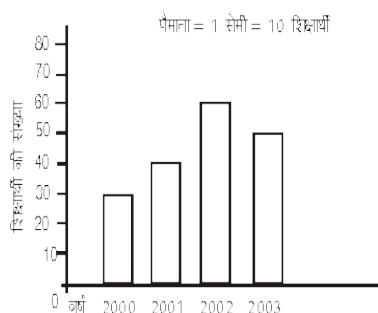
2.*निम्नांकित आरेख वर्ष* 2000-2004 ***में सरकार द्वारा खरीदे गए गेहूँ की मात्रा दर्शाता है*** ।

उपर्युक्त दंड आरेख पर आधारित निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i).*इस आरेख का पैमाना क्या है* ?

(ii).*किस वर्ष में गेहूँ की अधिकतम मात्रा खरीदी गई और कितनी* ?

(ii).*किस वर्ष में गेहूँ की न्यूनतम मात्रा खरीदी गई* ?

(iii).*वर्ष* 2002 *में गेहूँ की कितनी मात्रा खरीदी गई* ?

3.*निम्नांकित दंड आरेख किसी आवासीय विद्यालय में प्रवेश पाने वाले शिक्षार्थियों की संख्या को दर्शाता है।*

उपर्युक्त दण्ड आरेख के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

i). *वर्ष*2001 *में शिक्षार्थियों की संख्या कितनी थी* ?

ii). *वर्ष* 2002 *में शिक्षार्थियों की संख्या वर्ष* 2001*के शिक्षार्थियों की संख्या से कितनी अधिक थी* ?

iii). *अधिकतम शिक्षार्थियों की संख्या किस वर्ष में थी* ?

4.10.6 *ग्राफ* (Graph)*पेपर पर दण्ड आरेख खीचना* -

अब हम ग्राफ पेपर का उपयोग कर दण्ड आरेख खींचना सीखेंगे। सुविधा और परिशुद्धता के लिए ग्राफ पेपर पर दण्ड आरेख खींचना अधिक उपयुक्त होता है।

ग्राफ पेपर पर दंड आरेख की रचना को निम्नलिखित उदाहरण द्वारा समझ सकते हैं :

उदाहरण **6:***एक बैंक द्वारा कुछ वर्षो में ऋण में दी गई धनराशि (करोड़ रुपयों में) निम्नलिखित सारणी में दी गई है। इस सूचना को प्रदर्शित करने वाला दंड आरेख*

खीचिंए।

वर्ष	2000	2001	2002	2003	2004
ऋण (करोड़ रूपयों में)	20	25	30	45	60

दण्ड आरेख की रचना निम्नलिखित चरणों में की जाएगी।

चरण : 1 ग्राफ पेपर पर दो परस्पर लम्ब रेखाएँ खींच कर, क्षैतिज अक्ष और ऊध्र्वाधर अक्ष नामांकित कीजिए।

चरण : 2 क्षैतिज अक्ष पर 'वर्ष' दर्शाएँ और ऊध्र्वाधर अक्ष पर संगत ऋण रुपयो (करोड़) में अंकित कीजिए।

चरण : 3 दिए गए आँकड़ों के आधार पर, क्षैतिज अक्ष पर दंडों की एक समान चौड़ाई और उनके बीच समान दूरी निश्चित कर लीजिए।

चरण : 4 दिए गये आँकड़ों के अनुसार ऊध्र्वाधर अक्ष पर एक उपयुक्त पैमाना लीजिए। यहाँ पर iराफ पेपर पर एक सेमी =रू10 करोड़

चरण : 5 अब दिए गये विभिन्न वर्षों के लिए दंडो की ऊँचाई का परिकलन इस प्रकार कीजिए :

वर्ष दण्ड की ऊँचाई

2000 : $\frac{1}{10}$X20 करोड़ = 2 मात्रक

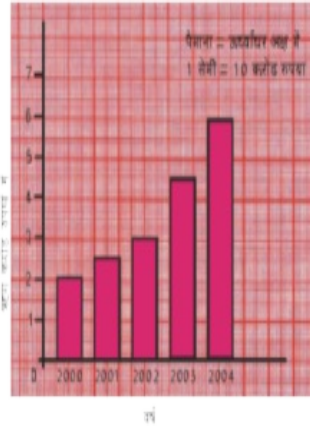
2001 : $\frac{1}{10}$X25 करोड़ = 2.5 मात्रक

2002 : $\frac{1}{10}$x30 करोड़ = 3.0 मात्रक

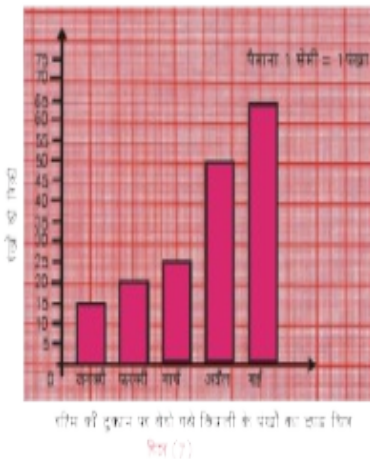
2003 : $\frac{1}{10}$X 45 करोड़ =4.5मात्रक

2004 : $\frac{1}{10}$X60 करोड़ = 6.0 मात्रक

चरण : 6 अब अग्रांकित आकृति के अनुसार क्षैतिज अक्ष पर बराबर दूरी छोड़ते हुए बराबर चौड़ाई के पाँच दंड बनाइए। चरण 5 में दंडों की ऊँचाइयाँ

निकाली गई हैं। प्रत्येक दंड क्षैतिज अक्ष पर चिह्नित संगत वर्ष के ऊपर होना चाहिए।

बैंक द्वारा ऋण दी गई धनराशि का दण्ड चित्र

चित्र8

निम्नांकित दंड आरेख को देखिए :

उपर्युक्त चित्र में रश्मि की दुकान पर माह जनवरी से मई तक पाँच माह में बेचे गये बिजली के पंखों की संख्या प्रदर्शित की गई है। इन दंड चित्रों को देखकर हम निम्नलिखित निष्कर्ष निकालते हैं -

- दंड चित्रों में माह क्षैतिज अक्षपर तथा बेचे गये पंखों की संख्या, ऊध्र्वाधर अक्ष पर प्रदर्शित की गई है।
- ध्यान दें, पड़ी रेखा क्षैतिज अक्ष और खड़ी रेखा ऊध्र्वाधर अक्ष होती है।

• माह जनवरी से मई तक प्रत्येक माह पंखों की बिक्री बढ़ती गयी है।

• माह जनवरी में सबसे कम 15 पंखों की बिक्री हुई।

• माह मई में सबसे अधिक 65 पंखों की बिक्री हुई।

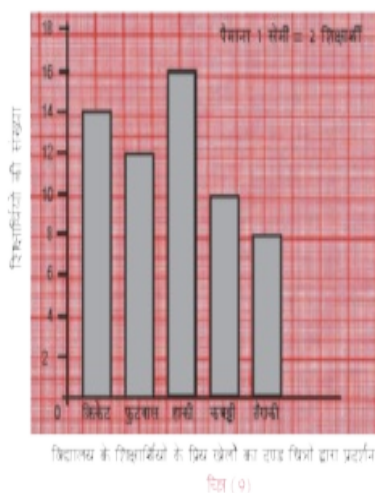
• पाँच माह में कुल 175 पंखे बिके।

• सर्दी के महीनों में पंखों की बिक्री कम तथा गर्मी में अधिक होती है।

हम देखते हैं कि जब आँकड़े दंड चित्रों के माध्यम से प्रदर्शित किये जाते हैं तो उन्हें समझना आसान होता है तथा उनका प्रभाव भी स्थायी रहता है।

उदाहरण 7: किसी विद्यालय के60 शिक्षार्थियों के प्रिय खेलों का विवरण निम्नवत् है :

खेल	क्रिकेट	फुटबाल	हॉकी	कबड्डी	तैराकी
शिक्षार्थियों की संख्या	14	12	16	10	8

उपर्युक्त आँकड़ों को दंड चित्रों द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

ग्राफ पेपर पर दंड चित्र बनाने के सोपान :

1. एक वर्गांकित कागज अथवा सादा कागज लीजिए। कागज पर चित्र (9) की भाँति 0A और 0B दो रेखाएँ खींचिए, जो एक दूसरे पर लम्ब हों।0A क्षैतिज तथा 0B ऊध्वाधर अक्ष हैं।

2.क्षैतिज अक्ष पर खेल तथा उध्वाधर अक्ष पर शिक्षार्थियों की संख्या लीजिए।

3.क्षैतिज अक्ष पर समान मोटाई या चौड़ाई की सुविधानुसार समान दूरी पर दण्ड खींचिए। यहाँ पर यहध्यान रखना होगा कि कागज पर सुलभ क्षेत्र का आँकड़ों के सन्दर्भ में समुचित उपयोग हो।

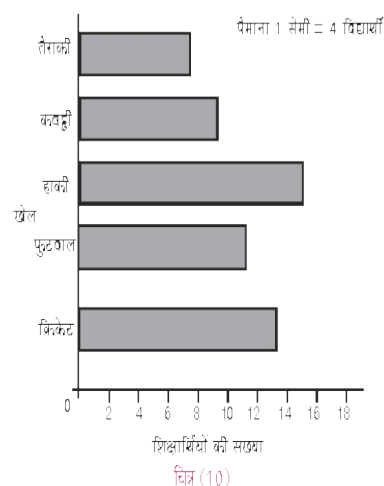
4.उर्ध्वाधर अक्ष पर कोई पैमाना1 सेमी =2 शिक्षार्थी मान लीजिए। अब इस अक्ष पर एक-एक सेमी की दूरी पर चिह्न लगाकर संख्याएँ 2,4,6,8. आदि लिखिए। यदि कागज सादा हो तो सुविधा के लिएOBअक्ष से एक-एक सेमी की दूरी परOA के समान्तर हल्की बिन्दुदार रेखाएँ खींचिए।

5.अब क्षैतिज अक्ष पर शिक्षार्थियों की संख्या को देखते हुए खेले जाने वाले खेलों के ऊपर दंड बनाइए। यहाँ दंड या आयताकार पट्टियों की चौड़ाई 5 मिमी या अधिक रखिए।

6. पट्टियों को आकर्षक बनाने के लिए रंग दीजिए।

दंड चित्रों को उर्ध्वाधर व क्षैतिज दोनों प्रकार से बनाया जा सकता है। इससे आँकड़ो के स्वरूप अथवा निष्कर्ष पर कोई विपरीत प्रभाव नहीं पड़ता है।

उपर्युक्त आँकड़ों को निम्नलिखित ढंग से भी प्रदर्शित किया जा सकता है:

चित्र (10)

निर्देश :

1. दण्ड चित्रों को अधिक आकर्षक बनाने के लिए आँकड़ों को आरोही अथवा अवरोही क्रम में रखकर भी दण्ड चित्र बना सकते हैं।

2. क्षैतिज व ऊर्ध्वाधर अक्ष पर माना गया पैमाना उपलब्ध कागज के आकार पर निर्भर करता है।

3. सुविधानुसार पैमाना छोटा या बड़ा माना जा सकता है।

4. आयताकार पट्टियों (दंडो) की चौड़ाई या मोटाई सुविधानुसार कम या अधिक

रखी जा सकती है।

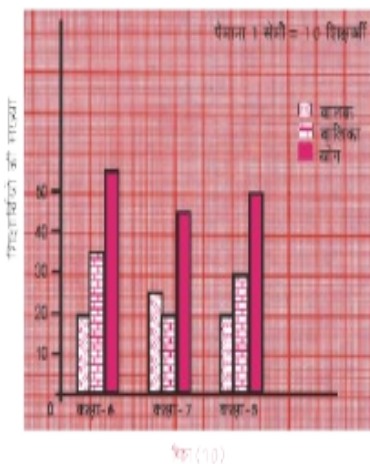
4.11 *मिश्रित दंड आरेख :*

अभी तक हमने दंड चित्रों में केवल एक गुण वाले आँकड़ों को प्रदर्शित किया है। जैसे एक गुण दंड चित्रों के माध्यम से कक्षा के सभी शिक्षार्थियों की संख्याओं को प्रदर्शित किया जा सकता है किन्तु यदि इस कक्षा के शिक्षार्थियों में बालक, बालिकाओं तथा उनके योग को अलग-अलग प्रदर्शित करना हो, तो इसे बहुगुण दंड चित्रों अथवा मिश्रित दंडों द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

किसी जूनियर हाई स्कूल में शिक्षार्थियों की संख्या निम्नवत् दी गई है :

	कक्षा 6	कक्षा 7	कक्षा 8
बालक	20	25	20
बालिका	35	20	30
योग	55	45	50

आँकड़ों का मिश्रित दंडचित्रों द्वारा प्रदर्शन :

चित्र (10)

उपर्युक्त चित्र को देखकर निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर दीजिए :

(i).*दंडों द्वारा क्या प्रदर्शित किया गया हैं?*

(ii).*बालिकाओं की संख्या के लिए कक्षा* 7 *में दंड की उँâचाई कितनी है?*

(iii).*किस कक्षा में शिक्षार्थी सबसे कम हैं?*

(iv)*किसी दंड की ऊँचाई यदि* 5 *सेमी ऊँचाई के बराबर हो तो उस कक्षा के*

शिक्षार्थियों की संख्या कितनी होगी ?

हल: (i).***दंडों द्वारा कक्षा***6,7 ***और***8 ***के बालक, बालिकाओं तथा उनके योग की संख्या पृथक-पृथक प्रदर्शित की गई है।***

(ii).***दंड की ऊँचाई*** 2***सेमी ऊँचाई के बराबर है।***

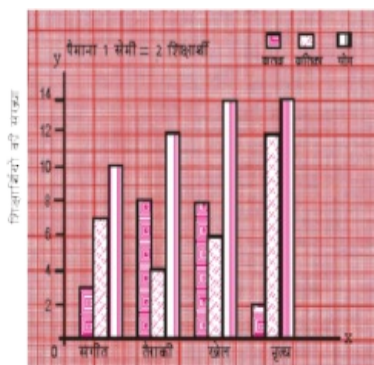
(iii).***कक्षा*** 7 ***में सबसे कम शिक्षार्थी हैं।***

(iv).***शिक्षार्थियों की संख्या*** 50***है।***

उदाहरण* 8 *:कक्षा 6 ***के*** 50 ***शिक्षार्थियों के विभिन्न विषयों की पसन्द का विवरण निम्नवत् दर्शाया गया हैं*** :

विषय	विद्यार्थियों की संख्या		
	बालक	बालिका	योग
संगीत	3	7	10
तैराकी	8	4	12
खेल	8	6	14
नृत्य	2	12	14

आँकड़ों को मिश्रित दंड चित्रों द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

हल :

दंड चित्र बनाने हेतु सोपान :

(i).***एक वर्गांकित कागज लीजिए।***

(ii).***वर्गांकित कागज पर मूल बिन्दु*** O ***से परस्पर लम्ब*** X-***अक्ष तथा*** Y- ***अक्ष खीचिए*** ।

(iii)X- *अक्ष पर पसन्द के विषय तथा* Y- *अक्ष पर शिक्षार्थियों की संख्या को प्रदर्शित कीजिए।*

(iv)X- *अक्ष पर किसी उपयुक्त दूरी के अन्तर पर विषयों के नाम लिखिए।*

(v)Y-*अक्ष पर भी कोई उपयुक्त पैमाना यथा* 1 *सेमी* =2 *शिक्षार्थी लेकर शिक्षार्थियो की संख्या लिखिए।*

(vi).X-*अक्ष पर विषयों के ऊपर* Y- *अक्ष की संगत शिक्षार्थी संख्या के अनुसार निश्चित*

ऊँचाई के दंड बालक, बलिकाओं तथा योग के लिए बनाइए। दंड एक दूसरे से सटे हों तथा समान चौड़ाई के हों।

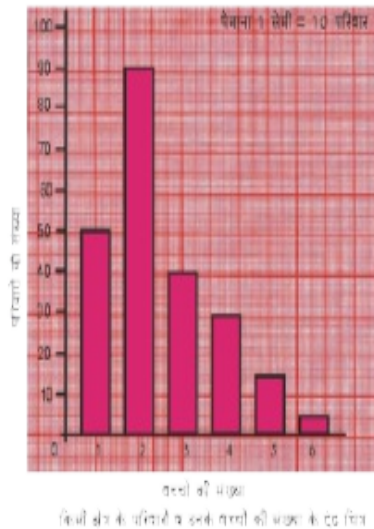
प्रयास कीजिए :

*किसी विद्यालय में वर्ष*1961 *से*2001*तक की दशकवार प्रवेश दर लगभग निम्नवत् हैं :*

वर्ष	1961	1971	1981	1991	2001
प्रवेश दर	20	30	35	40	45

आँकड़ों का दंड चित्रों द्वारा प्रदर्शन कीजिए।

अभ्यास 4(e)

1. *दंड चित्रों को देख कर नीचे दिये गये प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

बताइए :

(i). ***दंड चित्रों से क्या सूचना प्राप्त हो रही है*** ?

(ii). ***कितने परिवारों में केवल एक बच्चा है*** ?

(iii). ***दो बच्चों वाले कितने परिवार हैं*** ?

(iv). ***कितने परिवारों में तीन से कम बच्चे हैं***

(v). ***तीन से अधिक बच्चें वाले परिवारों की संख्या कितनी है*** ?

(vi). ***सबसे अधिक बच्चों वाले कितने परिवार हैं*** ?

2.*वर्ष* 2002 ***से*** 2006 ***के बीच एक फैक्टरी द्वारा निर्मित स्कूटियों की संख्या निम्नलिखित सारणी द्वारा दर्शाई गयी है*** :

वर्ष	2002	2003	2004	2005	2006
स्कूटियों की संख्या	800	600	900	1100	1200

इन आँकड़ों को एक दंड आरेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए और निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

(i). ***किस वर्ष में सबसे अधिक स्कूâटियाँ निर्मित की गयीं*** ?

ii). *किस वर्ष में न्यूनतम स्कूâटियाँ निर्मित की गयीं* ?

3.*नीचे दी गई अंक तालिका के प्राप्तांकों की टैली चिह्न की सहायता से बारम्बारता ज्ञात कीजिए।*

7, 9, 8, 5, 5, 6, 9, 4, 10, 8, 7, 4, 3, 5, 6, 6, 6, 8, 10, 3, 3, 4, 5, 7, 7, 8, 8, 6, 6, 7.

1	2	3	4
क्रम संख्या	प्राप्तांक	टैली चिन्ह	बारम्बारता
1	7	IIII	5
2	9	II	2
3			
4			
5			
6			
7			
8			

4.*अजय के विभिन्न विषयों के प्राप्तांकों का प्रतिशत निम्नवत् हैं* :

हिन्दी	अंग्रेजी	गणित	विज्ञान	समाजिक विज्ञान
35	35	60	40	70

उपर्युक्त आँकड़ों को दण्ड चित्र द्वारा निरूपित कीजिए।

इस इकाई से हमने सीखा

1.***किसी निश्चित उद्देश्य से एकत्र किए गए संख्याओं केसiरंह को आँकड़े कहते हैं।***

(i)***आँकड़े परिवर्तनशील होते हैं।***

(ii)***सजातीय आँकड़े होने पर ही तुलना करके निष्कर्ष निकाला जा सकता है।***

(iii)***आँकड़े समूह में एकत्र किये जाते हैं।***

(iv)***आँकड़े सदैव संख्यात्मक राशि में होते हैं।***

2.***आँकड़े मूल रूप में अव्यवस्थित होते हैं, इन्हें अपरिष्कृत आँकड़े अथवा कच्चे आँकड़े कहते हैं।***

3.***आँकड़ों का सiरंह दो प्रकार से किया जाता है:***

(i) *प्राथमिक स्रोतों से* (ii) *द्वितीयक स्रोतों से*

4.*अपरिष्कृत आँकड़ों को व्यवस्थित करने के लिए दो विधियों का प्रयोग किया जाता है :*

(i) *ऑकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में लिखते हैं,*

(ii) *आँकड़ों का वर्गीकरण करते हैं।*

5.*आँकड़ों का वर्गीकरण गुणों के आधार पर अथवा वर्ग-अन्तराल के आधार पर करते हैं।*

6.*आरोही क्रम में पहले सबसे छोटी संख्या लिखते हैं फिर क्रम से बराबर या बड़ी संख्या लिखते जाते हैं। इसके विपरीत अवरोही क्रम में पहले सबसे बड़ी संख्या फिर इसके बराबर या उससे छोटी संख्या लिखी जाती है।*

7.*प्राप्त आँकड़ों से कुछ विशेष सूचना तुरन्त प्राप्त करने के लिए, उन्हें मिलान चिह्नो का प्रयोग करके सारणियों के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है।*

8.*चित्रारेख आँकड़ों को चित्रों के रूप में निरूपित करता है। इनकी व्याख्या करके विभिन्न प्रश्नों के उत्तर प्राप्त किये जाते हैं।*

9.*आँकड़ों को दंड आरेख द्वारा भी निरूपित किया जाता है। एक दण्ड आरेख मे समान दूरी पर समान चौड़ाई के दंड क्षैतिज या उध्र्वाधर खींचे जाते हैं, प्रत्येक दंड की लम्बाई वांछित सूचना दर्शाती है। दंड आरेख के लिए आँकड़ों की संख्या की दृष्टि से पैमाना लेना चाहिए।*

उत्तरमाला

अभ्यास **4 (a)**

1. 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9; 2. 2, 4, 6, 8, 9, 12, 22, 23, 24, 25, 29, 32, 37, 42,

44; 3. 75, 74, 73, 67, 62, 61, 57, 55, 42, 33; 4. 25, 24, 21, 19, 17, 16, 16, 15, 12, 12, 12, 11, 11, 9, 9, 8, 8, 8, 7, 3.; 7 **व्यक्तियों ने** 10 **दिनों से कम कार्य किये**।

अभ्यास 4 (b)

1.

क्रम संख्या	संख्या	टैली चिह्न	बारम्बारता
1	5	|||	3
2	6	||	2
3	8	|||	3
4	9	|	1
5	11	|||	3
6	13	||	2
7	14	|	1

2. I

संख्या	2	3	4	5
बारम्बारता	3	3	3	5

2. II

संख्या	12	13	14	15	16
बारम्बारता	2	2	1	4	3

अभ्यास 4 (c)

1. 🚩 **=10**

2 (i) ***रविवार*** (ii) 8 (iii) 44 (iv) 1800***रुपये*** (v) ***बुधवार और शनिवार***, 4 ***घड़ियाँ*** ।

3. ☺ = 20***शिक्षार्थी***

फुटबाल	☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺
हाकी	☺☺☺☺☺☺☺
क्रिकेट	☺☺☺☺☺
कबड्डी	☺☺☺☺
शतरंज	☺

4. (i) 35 (ii) ***सोमवार, मंगलवार, शुक्रवार*** (iii) ***शनिवार*** (iv) 25

5. ♀ = 100***शिक्षार्थी***

वर्ष	शिक्षार्थी
2000	♀♀♀♀
2002	♀♀♀♀♀
2004	♀♀♀♀♀♀♀
2006	♀♀♀♀♀♀
2008	♀♀♀♀♀♀♀♀

(i) 4 (ii) 6

(iii) ♀ = 50 ***शिक्षार्थी***

वर्ष	शिक्षार्थी
2000	♀♀♀♀♀♀♀♀♀
2002	♀♀♀♀♀♀♀♀♀♀
2004	♀♀♀♀♀♀♀♀♀♀♀♀♀♀
2006	♀♀♀♀♀♀♀♀♀♀♀♀
2008	♀♀♀♀♀♀♀♀♀♀♀♀♀♀♀♀

अभ्यास 4 (d)

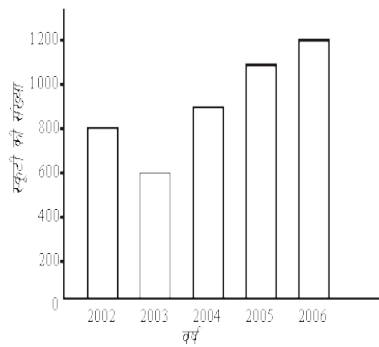
1. (i)विषयों में प्राप्त अंक (ii) गणित (iii) सामाजिक विज्ञान(iv)हिंदी 60, अंरेजी 55,गणित 80 विज्ञान 75 सामाजिक विज्ञान 50 2- (i) 1 सेमी = 5 हजार टन (ii) वर्ष 2004, 30000 टन
(iii) वर्ष 2000 मैं (iv) 20 हजार टन 3. (i) 40, (ii) 20, (iii) वर्ष 2002 में

अभ्यास 4 (e)

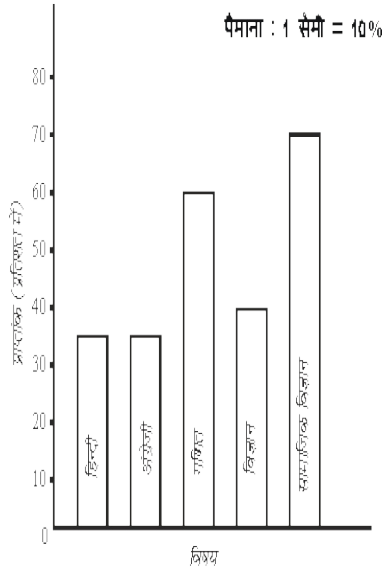
1. (i) परिवार व उनके बच्चों की संख्या (ii) 50, (iii) 90, (iv) 140, (v) 50, (vi) 5

2.

(i) 2006 (ii) 2003

3.

1 क्रम	2 प्राप्तांक	3 टैली चिह्न	4 बारम्बारता
1	7	$\cancel{||||}$	5
2	9	||	2
3	8	$\cancel{||||}$	5
4	5	||||	4
5	6	$\cancel{||||}$ |	6
6	4	|||	3
7	10	||	2
8	3	|||	3

4.

पैमाना : 1 सेमी = 10%
प्राप्तांक (प्रतिशत में)
80
70
60
50
40
30
20
10
0
हिन्दी
अंग्रेजी
गणित
विज्ञान
सामाजिक विज्ञान
विषय

इकाई -5 बीजगणित की अवधारणा

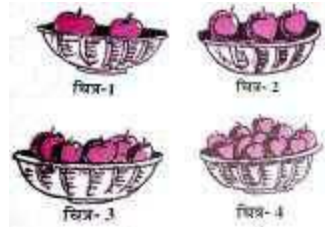
- संख्याओं को दर्शाने के लिए अक्षरों का प्रयोग
- संख्याओं और अक्षर संख्याओं की मूल संक्रियाएँ
- अक्षर संख्याओं की घात
- चर और अचर संख्याएँ

5.1 भूमिका :

हमने अंकगणित में संख्याओं और उनपर विभिन्न संक्रियाओं का अध्ययन किया है। अपने दैनिक जीवन की अधिकांश समस्याओं को हल करने में संख्याओं का उपयोग हम देख चुके हैं। संख्याओं से संबंधित जटिल समस्याओं का हल कई बार अंकगणितीय विधियों से नहीं हो पाता। इसके अतिरिक्त समस्याओं को और अधिक प्रभावशाली ढंग से हल करने की आवश्यकता पड़ती है जिसे हम एक अन्य विधि से करते हैं। अब हम इससे संबंधित उस गणित की शाखा का अध्ययन करेंगे जो बीजगणित (Algebra)कही जाती है।

हमारे देश में बीजगणित का अध्ययन प्राचीन काल से ही होता रहा है। बीजगणित वस्तुत: अंकगणित का ही व्यापक रूप है। इसकी मुख्य विशेषता यह है कि इसमें संख्याओं के स्थान पर अक्षरों का भी प्रयोग किया जाता है। अक्षर संख्याओं के प्रयोग से हम केवल एक विशेष संख्या की बात न कर के किसी भी संख्या की बात कर सकते हैं, इसीलिए इन्हें बीजगणित कहा जाता है। बीजों की सहायता से नियमों और सूत्रों को व्यापक रूप से लिख सकते हैं। संख्याओं के लिए अक्षरों का प्रयोग करके प्राप्त अक्षर संख्याओं पर भी गुणा, भाग आदि की संक्रियाएँएँ की जा सकती

है। आप पायेंगे कि बीजगणित न केवल उपयोगी है, आपितु यह अत्यंत रोचक भी है।

5.2 संख्याओं को दर्शाने के लिए अक्षरों का प्रयोग, पढ़िये और समझिए:

चित्र - 1 की टोकरी में कितने सेब हैं?

टोकरी में 2 सेब हैं।

चित्र-2 की टोकरी में कितने सेब हैं?

टोकरी में 3 सेब हैं।

चित्र -3 की टोकरी में कितने सेब हैं ?

टोकरी मेंपाँच सेब हैं।

चित्र -4 की टोकरी में सेब भरे हैं, इनको देखकर सही संख्या बताइए।

इनके फलों को गिनना कठिन है। अत: केवल हम यह कह सकते हैं कि टोकरी में 'कुछ' सेब हैं।

चित्र-5 में वर्ग बने हैं। इन्हें देखकर प्रत्येक वर्ग की भुजा की लम्बाई बताइए।

वर्ग ABDC की भुजा की लम्बाई = 2 सेमी

वर्ग EFHG की भुजा की लम्बाई = 4 सेमी

वर्ग LMNO *की भुजा की लम्बाई ज्ञात नहीं है। इसे हम 'कुछ' सेमी मान सकते हैं।*

*राम के पास रू*45 *थे। उसे अपनी बहन शीला से कुछ रुपये मिल गये। अब उसके पास कुल कितने रुपये हैं। राम के पास कुल रू*(45 + *कुछ*) *हैं।*

उपर्युक्त उदाहरणों में हमने देखा कि गणित में अभी तक संख्याओं को संख्या संकेतों 0,1,2,3.........8,9 *से निरूपित करते हैं। हमें ऐसी संख्याओं की भी बात करनी होती है, जो ज्ञात नहीं होती हैं किन्तु ज्ञात की जा सकती हैं। ऐसी संख्याओं के लिए अंग्रेजी*(*अथवा हिन्दी*) *वर्णमाला के अक्षरों का प्रयोग किया जाता है।*

मान लीजिए, किसी विद्यालय में वृक्षारोपण कार्यक्रम आयोजित किया जा रहा है। प्रत्येक शिक्षार्थी 2 *पौधे लगाता है। पहली शिक्षार्थी दो पौधे लगाती है।*

अत: पौधों की संख्या = 2

दूसरा शिक्षार्थी भी दो पौधे लगाता है, अत: पौधों की कुल संख्या = 2×2= 4

तीसराशिक्षार्थी भी दो पौधे लगाता है, अत: पौधों की कुल संख्या = 2×3= 6

इस प्रकार

दस शिक्षार्थि हों द्वारा लगाये गये पौधों की कुल संख्या = 2× 10 = 20

बीस शिक्षार्थिहों द्वारा लगाये गये पौधों की कुल संख्या = 2 × 20 =40

हम प्रत्येक स्थिति में कुल पौधों की संख्या कैसे ज्ञात कर रहे हैं? हम देखते हैं कि पौधों की कुल संख्या

= 2×(*शिक्षार्थियों की संख्या*)

आइए, *सुविधा के लिए हम शिक्षार्थिहों की संख्या के लिए अक्षर* n*मान लेते हैं*।

अत: *लगाये गये पौधों की कुल संख्या* = 2 ×n= 2n

ध्यान दीजिए

एक छात्र के लिए n = 1, *दो छात्रों के लिए* n = 2, *इत्यदि इस प्रकार* n*कोई भी प्राकृतिक संख्या* 1,2,3........*हो सकती है*।

50 *छात्रों द्वारा रोपित पौधों की संख्या के लिए हम* n= 50 *लेंगे*। *अत*: *पौधों की संख्या* 2 × 50 = 100 *क्या अक्षर* n *द्वारा व्यक्त किये गये सूत्र* 2n *द्वारा पौधों की कुल संख्या ज्ञात करना आसान नहीं हुआ*?

छात्रों की संख्या	1	2	3	...	...	...	10	...	....	20	...	50	....	n
पौधों की संख्या	2	4	6	...	...	..	20	..	...	40	...	100	...	2n

किसी अज्ञात संख्या को अँग्रेजी वर्णमाला के x, y, z, a, b, c ,*आदि तथा हिन्दी वर्णमाला के क*, *ख*, *ग*, *य*, *र*, *ल आदि अक्षरों से व्यक्त करते हैं*। *इन संख्याओं को अक्षर संख्या हा बीज कहते हैं*।

उपर्युक्त उदाहरणों में हम ‘ *कुछ*’ *सेबों के स्थान पर* ‘ a ’ *सेब*, *वर्ग की भुजा की* ‘ *कुछ*’ *सेमी लम्बाई के स्थान पर* ‘ y ’*सेमी लम्बाई तथा शीला द्वारा राम को दिये गये* ‘ *कुछ*’ *रुपयों को* ‘ x ’ *रुपयों द्वारा प्रकट कर सकते हैं*। *प्रयुक्त अक्षर* a , y , x *अक्षर संख्याएं है*। *ये अक्षर संख्याएं किसी राशि को प्रकट नहीं करतीं*, *केवल संख्याओं को व्यक्त करती हैं*।

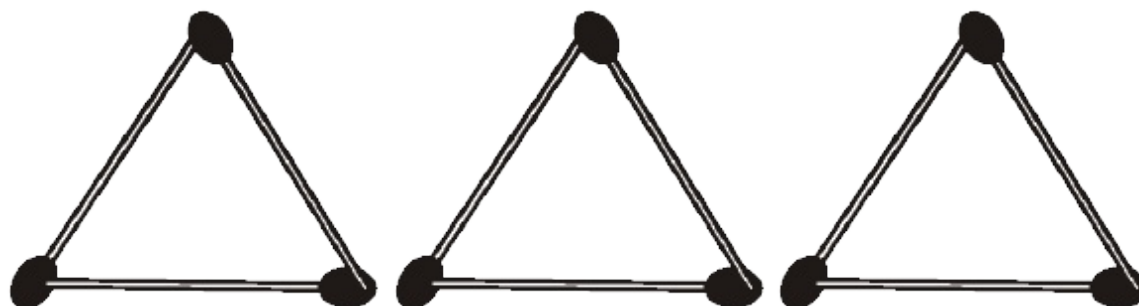
निम्नलिखित कथनों पर ध्यान दीजिए :

1. *सईदा के पास* ‘ n ’ *आम हैं*। *इस कथन से आमों की संख्या के बारे में क्या ज्ञात होता है*? *इससे ज्ञात होता है कि सईदा के पास कुछ आम हैं जिनकी निश्चित संख्या*

ज्ञात नहीं है। n का मान कोई भी संख्या हो सकती है।

2. श्याम के पास रू4357 थे। उसने कुछ रुपये मनीषा को दिये। मान लीजिए कि श्याम ने मनीषा को रु x दिये, तो उसके पास कुल रु (4357 - x) बचे।

3. अमीना मचिस की तीलियों से समबाहु त्रिभुजों के प्रतिरूप बना रही है-

उसी समय उसका मित्र राकेश आ जाता है। वह अमीना से पूछता है कि यदि ऐसे त्रिभुज के 6 प्रतिरूप बनाने हों, तो कुल कितनी तीलियाँ लगेंगी?

अमीना अपने बनाये गये त्रिभुजों के प्रतिरूपों को देखकर निम्नांकित सारणी तैयार करती हैं:

बनाये गये त्रिभुजों की संख्या	1	2	3	4	5	6
आवश्यक तीलियों की संख्या	3	6	9	12	15	18

अमीना राकेश को बताती है कि त्रिभुजों के 6 प्रतिरुप बनाने में कुल 18 तीलियाँ लगेंगी।

प्रयास कीजिए

आप बताइए कि यदि उपर्युक्त त्रिभुजों के प्रतिरूपों की संख्या n हो तो आवश्यक तीलियों की कुल संख्या क्या होगी?

उदाहरण 1: अक्षर v का (v के रूप में) तीलियों से प्रतिरूप बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या के लिए नियम ज्ञात कीजिए। नियम लिखने के लिए

एक चर का प्रयोग कीजिए।

हल : v का प्रतिरूप v तैयार करने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या
= 2 × 1 = 2

v के दो प्रतिरूप v v तैयार करने के लिए आवश्यक तीलियों की
संख्या = 2 × 2 = 4

v के तीन प्रतिरूप v v v तैयार करने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या
= 2 × 3 = 6

....

अत: यदि v के n प्रतिरूप बनाने हों तो आवश्यक तीलियों की संख्या = 2× n= 2n

इस नियम को हम निम्नांकित सारणी के द्वारा प्रदर्शित कर सकते हैं :

बनाये गये v के प्रतिरूपों की संख्या	1	2	3	...	...	...	10	...	...	n
आवश्यक तीलियों की संख्या	2	4	6	..	...	..	20	...	...	2n

उदाहरण 2: मोहिनी रधिका की छोटी बहन है। मोहिनी रधिका से 5 वर्ष छोटी है। क्या आप मोहिनी की आयु को रधिका के आयु के पदों में व्यक्त कर सकते हैं?

हल : मान लीजिए कि रधिका की आयु = y वर्ष है।

दिया है कि मोहिनी रधिका से 5 वर्ष छोटी है।

अत: मोहिनी की आयु = (y -5) वर्ष

अभ्यास 5 (a)

1. शिक्षक प्रत्येक शिक्षार्थी को 3 पेंसिल देते हैं। यदि कक्षा में शिक्षर्थियों की कुल संख्या x हो तो बताइए कि शिक्षक शिक्षर्थियों को कुल कितनी पेंसिलें देते हैं?

2._अपनी उत्तर पुस्तिका पर रिक्त स्थानों में संख्याओं की जगह कोई बीज लिखिए और बताइए कि उसका प्रयोग किस संख्या के लिए किया गया है_ :

(i) 12 + 5 = 17 (ii) 40 - 10 = 30

☐ + 5 = 17 40 - ☐ = 30

(iii) 4 × 6 = 24 (iv) 35÷ 5 = 7

☐× 6 = 24 35 ÷ ☐ = 7

3. _रहीम के पास रू_10 _थे, उसने रजिया को कुछ रुपये दे दिये। उसके पास कितने रुपये बचे। इस सम्बन्ध को अक्षर संख्याओं की सहायता से व्यक्त कीजिए।_

4. _एक बगीचे में कुछ पेड़ थे।_ 50 _पेड़ और लगा देने पर पेड़ों की संख्या_ 120 _हो गई। इस कथन को अक्षर संख्या की सहायता से व्यक्त कीजिये।_

5. _अक्षर_ N _और_ M _के प्रत्येक प्रतिरूप को तीलियों से बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या के लिए नियम ज्ञात कीजिए। नियम लिखने के लिए एक चर का प्रयोग कीजिए।_

5.3 _संख्याओं और अक्षर संख्याओं पर मूल संक्रियाएँ_

_अक्षर संख्याएँ_ x, y, z......., a, b, c......_आदि संख्याओं को दर्शाने के काम आती हैं। सभी मूल संक्रियाएँएँ जो आंकिक संख्याओं के लिए प्रयोग में लायी जाती हैं, अक्षर संख्याओं के लिए भी प्रयुक्त होती हैं। यह तथ्य आप अधोलिखित तालिकाओं से समझ सकते हैं_ :

(i) _योग की संक्रियाएँ_

संख्याएँ	योगफल
5 और 4 जोड़ने पर	5+4
x और 4 जोड़ने पर	X+4
x और y जोड़ने पर	X+y
a,b तथा c जोड़ने पर	a+b+c

(ii) *अंतर की संक्रियाएँ*

10 में से 3 घटाने पर	10-3
x में से 5 घटाने पर	X-5
5 में से x घटाने पर	5-x
x में से y घटाने पर	X-y
x में से शून्य घटाने पर	x-0

(iii)*गुणा की संक्रियाएँ - गुणा संक्रियाएँ बार-बार जोड़ने की संक्रियाएँ के समान है। इसे ध्यान से देखिए।*

2 +2 +....... 4 बार = 4× 2 = 8
x+x+............ 4बार=4 × x=4x
a+a+............. 3 बार 3×a=3a
X+x+......... y बार. x×y=xy
1+1+....... x बार1×x=x
0+0+....... x बार 0×x=0

(iv) *भाग की संक्रियाएँ*

20 को 5 से विभाजित करने पर	20 ÷ 5 = $\frac{20}{5}$
a को b से विभाजित करने पर	a ÷ b = $\frac{a}{b}$
40 को p से विभाजित करने पर	40 ÷ p = $\frac{40}{p}$
b को 5 से विभाजित करने पर	b ÷ 5 = $\frac{b}{5}$

ध्यान दीजिए

1. 4 ×x *को सामान्यत:* 4x *लिखा जाता है। बीच में गुणा का चिह्न नहीं लगाते हैं।*

2. xy *का अर्थ* x × y *है।*

3. 1×x*को* 1*न लिखकर केवल* x *लिखा जाता है।*

4. $a \div b = \frac{a}{b}$ *और* $b \div a = \frac{b}{a}$

अत: के समान नहीं है, *जब तक कि* a=b*न हो।*

इसे निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त करते हैं :

a ÷ b ≠ b ÷ a ['≠' *को रूबराबर नहीं*' *पढ़ा जाता है*] *अर्थात्* $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$

5. *हम उदाहरण लेकर देख सकते हैं कि संख्याओं के गुणा के निम्नलिखित प्रगुण बीजों के गुणा में भी लागू होते हैं* :-

(i)   xy=yx (*क्रम विनिमेय प्रगुण*)

(ii) $(xy) \times z = x(yz)$ (*साहचर्य प्रगुण*)

(iii) x(y+z)=xy+xz (*वितरण प्रगुण*)

इस प्रकार, *हम उदाहरण लेकर देख सकते हैं कि संख्याओं कि भाँति अक्षर संख्यायें भी होगी*, *अंतर और विभाजन संक्रियों के प्रगुणों का पालन करती हैं।*

प्रयास कीजिए **:**

1. *अक्षर संख्या* x *तथा* 7 *का योगफल बताइए।*

2. 5 *से* y *घटाने पर अन्तर कितना होगा* ?

3.abc *और* d *का योगफल बताइए।*

4. 0×y *का मान बताइए।*

5. *यदि*x=1 *और* y=1 *तो* xy *का मान कितना होगा* ?

6.x *को* 30 *से विभाजित करने पर भागफल कितना होगा* ?

उदाहरण **3 :** *एक संख्या* x *है और दूसरी संख्या* 10; *इनका योगफल कितना होगा*?

हल **:** *पहली संख्या* = x

दूसरी संख्या = 10

योगफल = x + 10

उदाहरण **4 :** *हानि*, *क्रय मूल्य तथा विक्रय मूल्य के अन्तर के बराबर होती है*, (*जब विक्रय मूल्य*, *क्रय मूल्य से कम हो*)। *इस कथन को मूल संक्रियाओं के चिह्नों की सहायता से व्यक्त कीजिए।*

हल:*मान लिया कि क्रय मूल्य* = रूC

विक्रय मूल्य = रूS *हानि* = रूL

चूँकि हानि = *क्रय मूल्य* - *विक्रय मूल्य*

अत: रु L = रु C - रु S

∴L = रु (C - S)

अभ्यास 5 (b)

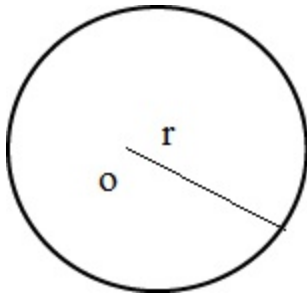
1. *निम्नलिखित को बीजगणितीय रूप में लिखिए* :

(i) 6 और x का योगफल

(ii) x में से 7 घटाने पर शेष

(iii) x का 5 गुना

(iv)x का एक तिहाई

2. निम्नलिखित कथनों को संख्याओं, बीजों तथा मूल संक्रियाओं के चिह्नों की सहायता से व्यक्त कीजिए :

(i) वृत्त का व्यास उसकी त्रिज्या का दूना होता है।

(ii) वर्ग का परिमाप उसकी एक भुजा का 4 गुना होता है।

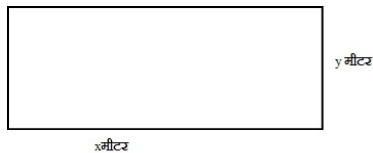
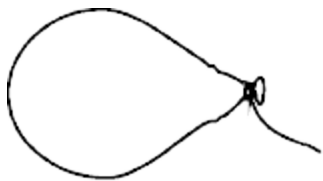
(iii) आयत का क्षेत्रफल उसकी लम्बाईतथा चौड़ाई का गुणनफल होता है।

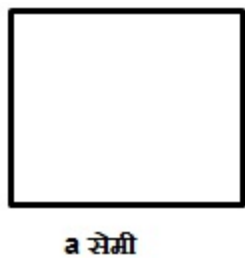
(iv) लाभ, विक्रय मूल्य तथा क्रय मूल्य के अन्तर के बराबर होता हैं, जब विक्रय मूल्य क्रय मूल्य से अधिक हो।

3 (a). एक टोकरी में 50 आम तथा एक दूसरी टोकरी में xआम हैं। पहली टोकरी में दूसरी टोकरी से कितने आम अधिक हैं।

(b). एक विद्यालय में कुल 100 छात्र हैं, जिनमें से x छात्र प्रदूषित जल पीने से बीमार हो गये, तो स्वस्थ छात्रों की संख्या ज्ञात कीजिए।

4. पार्श्व चित्र में आयत की आसन्न भुजाएँ x मीटर तथा y मीटर हैं। आयत का

परिमाप लिखिए।

5. *एक गुब्बारे का मूल्य* x *पैसे है। ऐसे* 12 *गुब्बारों का मूल्य कितना होगा*?

6. *कक्षा में विद्यार्थी हैं, जिनमें एक चौथाई बालिकाएँ हैं। कक्षा में कितनी बालिकाएँ हैं*?

7. *पार्श्वांकित चित्र में एक वर्ग की भुजा सेमी है।वर्ग का परिमाप लिखिए।*

1.4 *अक्षर संख्याओं की घात*

आप जानते हैं कि किसी वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें वर्ग की भुजा में उसी भुजा से गुणा करना पड़ता है। यदि वर्ग की भुजा 10 *सेमी है, तो उसका क्षेत्रफल* = 10 *सेमी* ×10 *सेमी* = 10 ×10 *सेमी*^{2} । *जिसे संक्षेप में हम* 10^2 *सेमी*^{2} *लिखते हैं।*

इसी प्रकार किसी घन का आयतन ज्ञात करने के लिए सूत्र, आयतन= *भुजा* × *भुजा* × *भुजा का प्रयोग किया जाता है। जैसे यदि घन की एक भुजा* 5 *सेंमी हो तो उसका आयतन*= 5 *सेमी* × 5 *सेमी* × 5 *सेमी* = 5× 5× 5 *सेमी*^{3} = 5^3*सेमी*^{3} = 125 *घन*

सेमी

ध्यान दीजिए

गुणनफल 10 × 10 *को संक्षेप में संकेतन* 10^2 *के द्वारा व्यक्त करते है। इसी प्रकार गुणनफल* 5 × 5 × 5 *को संक्षिप्त संकेतन* 5^3 *द्वारा व्यक्त करते हैं।* 10^2 *में* 10 *आधार* (base) *तथा* '2' *घातांक कहलाता है। इसी प्रकार* 5^3 *में* 5 *आधार* (base) *तथा* 3 *घातांक है।* 10^2 *को* '10 *का वर्ग' पढ़ते है। इसी प्रकार* 5^3 *को* 5 *का घन' पढ़ते हैं।* 10^2 *को* 100 *का घातांकीय रूप कहते हैं।* 5^3 *को किस संख्या का घातांकीय रूप कहेंगे* ?

हम बड़ी संख्याओं को घातांकों का प्रयोग कर संक्षिप्त रूप में लिख सकते हैं। सामान्यत: बड़ी संख्याओं को प ढ़ना, समझना और इनकी आपस में तुलना करना कठिन होता है। किन्तु संख्याओं को इनके घातांकीय रूप में व्यक्त करने से इनको पढ़ना, समझना तथा आपस में इनकी तुलना करना आसान हो जाता है।

किसी संख्या को बार-बार अपने आप से गुणा करने के बाद गुणनफल को घातांकीय रूप में लिखने की यह संक्षिप्त विधि अक्षर संख्याओं के लिए भी प्रयोग में लायी जा सकती है।

जैसे -

$x \times x = x^2$

$x \times x \times x = x^3$

x^2*को* x *का वर्ग पढ़ते हैं। इसी प्रकार,* x^3 *को* x *का घन प ढ़ते है। ऐसा क्यों* ? *यदि* x *का घात* 1 *हो तो इसे* x^1*नहीं लिखते। इसे केवल ही लिखा जाता है।*

इसी प्रकार,

$x \times x \times y \times y \times y$ को $x^2 y^3$ तथा

$5 \times x \times x \times x \times y$ को $5x^3y$ लिख सकते हैं।

प्रयास कीजिए :

1. 5 × x×x×x×x को घातांकीय रूप में लिखिए।

2.m×m×m को घातांकीय रूप में बदलिए।

3. $x \times x \times y \times y \times x$ का घातांकीय रूप क्या होगा?

उदाहरण 5: पार्श्व चित्र के बने आयताकार फर्श का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

aमीटर

2a मीटर

हल:

आयताकार फर्श का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

= $(2a \times a)$ वर्ग मीटर

=$2a^2$वर्ग मीटर

उदाहरण 6: एक गाँव की वर्तमान जनसंख्या x है। वर्ष केअन्त में इसकी जनसंख्या y

गुनी हो जाती है। इसी दर से वृद्धि होने पर चार वर्ष बाद गाँव की कुल जनसंख्या कितनी होगी?

हल :

गाँव की वर्तमान जनसंख्या $=x$

1 *वर्ष बाद गाँव की जनसंख्या* $=y\times x$

2 *वर्ष बाद गाँव की जनसंख्या* $=y\times(y\times x) = y\times y\times x$

3 *वर्ष बाद गाँव की जनसंख्या* $= y\times(y\times y\times x)=y\times y\times y\times x$

4 *वर्ष बाद गाँव की जनसंख्या* $= y\times(y\times y\times y\times x)$

$$= y\times y\times y\times y\times x=xy^4$$

अत: 4 *वर्ष बाद गाँव की जनसंख्या* xy^4 *होगी*।

अभ्यास 5 (c)

1.*निम्नलिखित को घातांकीय रूप में लिखिए* :

(i) $c\times c\times c\times\ldots\ldots\ldots\ldots 5$ *बार* (ii) $5\times a\times a\times b\times b\times b$

(iii) $7 \times 7 \times 7$ (iv) $t\times t\times y\times y$

2.*निम्नांकित को गुणा के रूप में लिखिए*:

(i)a^2b^2 (ii)$9ab^3$ (iii) $10x^3y^3z^3$

3.*निम्नलिखित को घातांकीय रूप में लिखिए*:

(i) a×a×a×.......n*बार* (ii)b×b×b×b.....n *बार*

(iii)3×3× 4×4×a×a (iv) a×s×t×t

4.*एक व्यक्ति की वर्तमान आय* a *उसकी आय प्रतिवर्ष* b*गुनी हो जाती है। तीन वर्ष बाद उसकी आय कितनी होगी* ?

5.5 *चर और अचर*

अधोलिखित सम्बन्ध का प्रयोग करते हुए, नीचे बनी तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

वृत्त का व्यास = 2 × *त्रिज्या*

d= 2 X r

***तालिका* -1**

r(सेमी)	2×r(सेमी)	d(सेमी)
3	2×3	6
5	...×....	10
10	2×..	...
r	2×r	2r

उपर्युक्त सारणी में हमने देखा कि का मान बदलने पर r *का मान भी बदल जाता है। अर्थात्* r *तथा* d *के मान तो बदल जाते हैं, किन्तु* 2 *नहीं बदलता।*

एक कार 40 *किमी/घंटा की चाल से जा रही है। कार द्वारा चली गयी दूरी , चाल एवं समय में संबंध निम्नांकित है* :

दूरी = *चाल* × *समय*

इस सम्बन्ध को प्रयोग करते हुए अधोलिखित तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

तालिका -2

समय t घंटे में	40 × t (चाल ×समय)	दूरी (s) किमी में
1	40× 1	40
2	40 ×...	80
3	40 × 3	.....
4	40 × 4	160
t	... × t	40t

उपर्युक्त दोनों तालिकाओं में हम देखते हैं कि कुछ राशियों का मान विभिन्न परिस्थितियों में बदलता रहता है और कुछ का मान परिस्थिति के अनुसार नहीं बदलता है।

जिनका मान परिस्थिति के अनुसार बदलता है वे चर तथा जिनका मान नहीं बदलता, वे अचर कहलाती है।

तालिका- 1 *में चर हैं तथा* 2 *अचर है। इसी प्रकार तालिका*- 2 *में* t *और* s *चर हैं तथा* 40 *अचर है।* (*क्यों* ?)-

***क्रियाकलाप* - 3**

शिक्षक बन्द थैले में रखी वस्तुओं की संख्या तथा मेज पर रखी वस्तुओं की संख्या छात्रों को बताने के लिए कहेंगे तथा ज्ञात और अज्ञात राशियों में अन्तर स्पष्ट करेंगे और बतायेंगे कि अज्ञात राशियों के लिए हम अक्षरों का प्रयोग करते हैं तथा इनका मान निश्चित नहीं होता है, इसलिए इन्हें चर कहते हैं तथा ज्ञात अंकों को अचर कहते हैं क्योंकि इनका मान निश्चित रहता है।

उदाहरण* 7 : *कथन $y = \frac{22}{7} x^2$ *में चर और अचर छांटिए।*

हल : $y=\frac{22}{7}x^2$ **में**

चर : x **तथा** y

अचर : $\frac{22}{7}$

अभ्यास 5 (d)

1. **निम्नलिखित कथनों में सत्य तथा असत्य कथन छाँटिए** :

(i) x**अचर राशि है।** (ii) 5 **एक अचर राशि है।**

(iii) $(x+5)$ **एक अचर राशि है।** (iv) 5**अचर राशि है।**

2. **निम्नलिखित कथनों में अचर लिखिए** :

(i)y=4x (ii)y=x+7

(iii) x+y=3 (iv) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$

दक्षता अभ्यास - 5

1. निम्नलिखित गणितीय कथनों पर ध्यान दीजिए तथा अपनी अभ्यास पुस्तिका में बाक्स के स्थान पर अक्षर संख्याओं के लिए संख्या लिखिए:

(i) 6 + 4 =x (ii) 3 × 9 =

6 + 4 = □ 3 × 9 =□

(iii) 6 - 2 = a (iv) $b \div 2 = 5$

6 - 2 = □ □ $\div 2 = 5$

2.*ज्ञात कीजिए* :

(i) 10 ***में से*** x ***घटाने पर प्राप्त संख्या*** (ii) 2x ***और*** 3y ***को जोड़ने पर प्राप्त संख्या***

(iii) y ***की*** 6 ***गुनी संख्या*** (iv) a ***में*** 3 ***का भाग देने पर प्राप्त संख्या***

3. *यदि* $a = 5$ ***तथा*** $b = 9$, ***तो निम्नांकित के मान ज्ञात कीजिए*** :

(i) a+10 (ii)b-3 (iii) a + b - 14 (iv) a× b (v) 30 ÷ a

4. *विस्तृत रूप को घातांकीय रूप में लिखिए* :

(i) $x \times x \times x \times y$ (ii) $q \times q \times q$

(iii) $2 \times y \times y \times y$ (iv) $5 \times 5 \times 5 \times x \times y \times y \times y$

(v) $m \times m \times m \times m$

5. *रिक्त स्थानों* □ ***की पूर्ति अपनी अभ्यास पुस्तिका में कीजिए*** :

(i) 10×10×10×t×t×t=10□ □ □ (ii) $4 \times 4 \times 4 = 4^{\square}$

(iii)6×p×p×q×q×q= 6 □ 2 q □ (iv) $s \times s \times s \times t \times t =$ □ 3 □ 2

6. *अधोलिखित कथनों को देखकर उसमें चर और अचर छाँटिए*:

(i) $5x^2y^2z^3$ (ii) $7x^2y^2$

(iii) m^4n^2 (iv) a^3b^5

इस इकाई में हमनें सीखा

1. *जो अक्षर, संख्याओं को दर्शाने के लिए प्रयुक्त किये जाते है, अक्षर संख्या या बीज कहलाते हैं। गणित की वह शाखा जिसमें बीजों के प्रयोग से समस्याएं हल की जाती हैं, बीजगणित कहलाता है।*

2. x, y, z, a, b, c *आदि अक्षर संख्याएं हैं, ये राशियाँ प्रकट नहीं करती हैं। जैसे यदि हम कमरे की लम्बाई लिखते हैं तो यह अशुद्ध है। कमरे की लम्बाई* x *मीटर लिखना शुद्ध होगा।*

3. *अंक संख्याओं के समान ही अक्षर संख्याएं तथा अक्षर संख्याओं के समूह योग, अन्तर, गुणन तथा विभाजन की संक्रियाओं का पालन करती हैं एवं संक्रियाओं के प्रगुणों का भी पालन करती हैं।*

4. *आंकिक संख्याओं की भाँति ही अक्षर संख्याओं के घातांकीय रूप होते हैं।*

5. *ऐसी अक्षर संख्याएं, जिनका संख्यात्मक मान विभिन्न परिस्थितियों में बदलता रहता है, चर कहलाती हैं।*

6. *वे अक्षर संख्याएं जिनका संख्यात्मक मान हर परिस्थिति में अपरिवर्तित रहता है, अचर कहलाती हैं।*

बीजगणित का प्रारम्भ

यह कहा जाता है कि गणित की एक शाखा के रूप में बीजगणित का प्रारम्भ लगभग 1550 *ई पूर्व में अर्थात् आज से* 3500 *वर्ष पूर्व हुआ, जब मिस्रवासियों ने अज्ञात संख्याओं को व्यक्त करने के लिए संकेतों का प्रयोग*

करना प्रारम्भ किया था।

300 *ई० पूर्व के आस-पास भारत में अज्ञातों को अक्षरों से व्यक्त करना और व्यंजक बनाना एक बहुत सामान्य बात थी। अनेक महान भारतीय गणितज्ञों जैसे आर्यभट्ट (जन्म 476 ई०), ब्रह्मगुप्त (जन्म 598 ई०), महावीर (जो लगभग 850 ई० में रहे) और भास्कर-II (जन्म 1114 ई०) तथा कई अन्य ने बीजगणित के अध्ययन में बहुत योगदान दिया। उन्होंने अज्ञात राशियों के लिए बीज, वर्ण इत्यादि जैसे नाम दिए और उन्हें व्यक्त करने के लिए रंगों के नामों के प्रथम अक्षरों के रूप में प्रयोग किया (जैसे काला से 'का' नीला से 'नी', इत्यादि)। एल्जबरा* (Algebra) *के लिए भारतीय नाम बीजगणित इन्हीं प्राचीन भारतीय गणितज्ञों के समय का है।*

शब्द एल्जबरा लगभग 825 *ई० में बगदाद के एक अरब गणितज्ञ मुहम्मद इबन अल खोवारिज्मों द्वारा लिखित एक पुस्तक "अलजिबार वॉल अलमुगाबालाह' के शीर्षक से लिया गया है।*

उत्तरमाला

अभ्यास 5 (a)

1(a). $3x$ ***पेन्सिलें***, **(b)** 41x ***बच्चे***, **2.** (i) x+5=17, x=12 (ii) 40-x=30,x=10 (iii)x×6=24,x=4 (iv)35÷x=7,x=5; **3.**10-x,, **4.**x+50=120, **5.** $3n, 4n$

अभ्यास 5 (b)

1. (i) $6+x$, (ii) $x-7$, (iii) $5x$, (iv) $\frac{x}{3}$; **2.**(i) $d=2r$, d ***वृत्त का व्यास है तथा*** r ***वृत्त की त्रिज्या है***।; (ii) S = 4x, S ***वर्ग का परिमाप है तथा*** x ***वर्ग की भुजा है***। (iii) A = x×y, A ***आयत का क्षेत्रफल है***, x***तथा*** y***आयत की क्रमश: लम्बाई और चौड़ाई है***।: (iv) I = S - C, I ***लाभ को प्रदर्शित कर रहा है***, S ***विक्रय मूल्य को तथा*** C ***क्रय मूल्य को प्रदर्शित कर रहा है***।; **3.**(a) (50 -x) ***आम***; (b)(100-

x)***छात्र*** **4.**12x ***पैसे*** **6.** $\frac{x}{4}$ ***बलिकायें***:7 4a***सेमी***।

***अभ्यास* 5 (c)**

1. (i) c^5 (ii) $5a^2b^3$ (iii) 73 (iv) t^2y^2 2. (i) $a \times a \times b \times b$, (ii) 9$\times a \times b \times b \times b$, (iii) 10$\times x \times x \times x \times y \times y \times y \times z \times z \times z$; **3.** (i)$a$ n , (ii)b^n , (iii) $3^2 \times 4^2 \times$a2 , (iv) ast^2 , **4.**ab^3

***अभ्यास* 5 (d)**

1. (i) ***असत्य*** (ii) ***सत्य*** (iii) ***असत्य*** (iv) ***असत्य*** **2.** (i) 4, (ii) 7, (iii) **3,** (iv) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, 1

***दक्षता अभ्यास* 5**

1. (i) 6 + 4 = 10, (ii) 3 $\times$ 9 = 27, (iii) 6 - 2 = 4 (iv) 10 $\div$2 = 5; **2.** (i) 10-x, (ii) $2x+3y$ (iii) $6y$ (iv) $\frac{a}{3}$, **3.** (i)15, (ii) 6 (iii) 0, (iv) 45 (v) 6; **4.** (i)x^3y, (ii) q^3 , (iii) $2y^3$, (iv)5^3xy^3(v)m^4 , **5.** (i)10^3t^3, (ii) 4^3 (iii) $6p^2q^3$ (iv) s^3t^2, **6**(i). 5***अचर***, $x, y,$ ***और*** z ***चर*** (ii) 7 ***अचर*** x, y***चर*** (iii)m,n***चर*** (iv) a,b***चर***

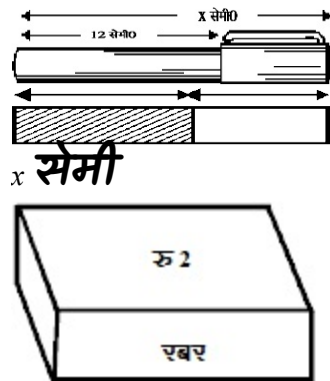
इकाई 6 बीजीय व्यंजक

- व्यंजक की अवधारणा
- व्यंजकों के पद, पदों के गुणनखण्ड एवं गुणांक
- सजातीय और विजातीय पद
- व्यंजको की डिग्री
- एक, दो एवं त्रिपदीय व्यंजकों की अवधारणा
- बीजीय व्यंजकों का जोड़ एवं घटाना
- बीजीय ब्यंजकों का मान ज्ञात करना
- कोष्ठकों का प्रयोग

6.1 भूमिका

पिछली इकाई में हमने देखा कि बीजगणित में अज्ञात संख्याओं के स्थान पर अक्षरो का प्रयोग किया जाता है। इन्हें अक्षर संख्या या बीज कहते है। अक्षर संख्याओं पर संख्याओं की भांति ही मूल संक्रियाएं भी की जाती हैं, साथ ही ये (अक्षर) संख्याएं संक्रियाओं के प्रगुणों का भी पालन करती हैं। संख्याओं की भांति अक्षर संख्याओं के गुणा को उनके घातांकीय रूप में व्यक्त किया जा सकता है। हमने चर एवं अचर संख्याओं का भेद करना भी समझ लिया है। अब इस इकाई में हम आंकिक संख्याओं और अक्षर संख्याओं पर योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन की संक्रियाएं कर बीजगणितीय व्यंजकों (संक्षेप में बीजीय व्यंजकों) को बनाना सीखेंगे तथा बीजीय व्यंजकों के पद, उनके गुणांक, सजातीय एवं विजातीय पद, एकपदीय, द्विपदीय एवं त्रिपदीय व्यंजक, बीजीय व्यंजकों के मान, बीजीय व्यंजकों का जोड़-घटाना और कोष्ठकों के प्रयोग के विषय में पढ़ेंगे।

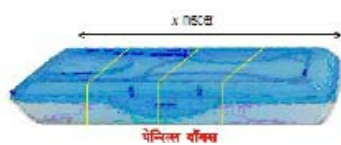
6.2 व्यंजक की अवधारणा

पिछले अध्याय में हम चर एवं अचर तथा इनके संयोजन से बनने वाले सरल व्यंजक, जैस x+5,y-7,4x+3,7y-5 इत्यदि से परिचित हो चुके हैं। आइए हम जाने कि ये व्यंजक किस प्रकार बनते हैं।

1.व्यंजक x+ 5 का x और 5 के योग से प्राप्त किया गया है।

छड़ की लम्बाई= x+5सेमी

2. व्यंजक x-12 को x से 12 को घटाने से प्राप्त किया गया है। कलम केढक्कन की लम्बाई= x-12सेमी

3.एक रबर का मूल्य रु 2 है,तो◌े रबर का मूल्य रु 2 और x के गुणा से प्राप्त रु2◌ेx होगा।

4. व्यंजक $\frac{x}{4}$ ‡को x में 4 से भाग देकर प्राप्त किया गया है।

बाक्स के प्रत्येक समान भाग की लम्बाई= $\frac{x}{4}$ सेमी

प्रयास कीजिए

बताइए कि निम्नांकित व्यंजक किस प्रकार प्राप्त किये जाते हैं:

(1) xऔर 7 का योगफल,

(2) xको 5 से गुणा करने पर गुणनफल

(3) a और b के योग का 3 गुना

(4) a ***का*** 4 ***गुना और*** b ***का योगफल।***

> ***कोई चर या अचर संख्या या इनका समूह मौलिक गणितीय संक्रियाएँओं के चिह्नों से युक्त होने पर बीजीय व्यंजक कहलाता है।***

6.3 ***व्यंजकों के पद***

1. $5x^2+7xy-1$ ***एक व्यंजक है जिसमें*** x ***तथा*** y ***चर हैं तथा*** 5, 7, -1 ***अचर हैं। यह*** $5x^2$, $7xy$ ***तथा*** -1 ***के योग से बना है जहाँ व्यंजक*** $5x^2= 5\times x\times x$ ***तथा*** $7xy=7\times x\times y$

2. $5p^2q-4pq^2+7$ ***एक व्यंजक है जिसमें*** p ***और*** q ***चर हैं तथा*** 5, -4 ***और*** 7 ***अचर हैं। यह व्यंजक*** $5p^2q, -4pq^2$ ***तथा*** 7 ***के योग से बना है जहा*** $5p^2q=5\times p\times p\times q$ ***तथा*** $-4pq^2=-4\times p\times q\times q$

यहाँ हम देखते हैं कि उपर्युक्त व्यंजक क्रमश: व्यंजकों $5x^2, 7xy, -1$ ***तथा*** $5p^2q, -4pq^2, 7$ ***के योगफल से बने हैं। ये व्यंजकों के खंड हैं जिन्हें मूल व्यंजक के पद कहते हैं।***

> ***किसी आंकिक संख्या या अक्षर संख्या या इनके गुणनफल या भागफल को पद कहते हैं।***

प्रयास कीजिए :

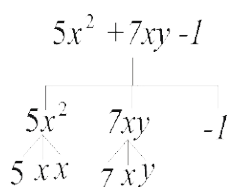
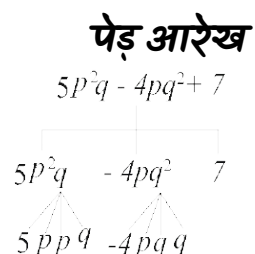
निम्नांकित व्यंजकों में पदों को छाँटिए :

$2x^2+3xy$, $3x^2y+5y-z$ ***और*** $5x^2y-4xy^2+3$

एक पद के गुणनखंड

हम पढ़ चुके हैं कि $5x^2+7xy-1$ ***के मूल पद*** $5x^2$, $7xy$ ***और*** -1 ***हैं। पद*** $5x^2$; 5, x ***और*** x ***का गुणनफल है या*** 5, x ***और*** x ***पद*** $5x^2$ ***के गुणनखंड हैं। प्रत्येक पद अपने गुणनखंडो का गुणनफल होता है। पद*** $7xy$; 7, x ***और*** y ***का गुणनफल है और पद*** -1 ***अचर है। हम***

एक व्यंजक के पदों को तथा पदों के गुणनखंडों को एक व्यंजक पेड़ आरेख (Tree diagram) द्वारा आकर्षक रूप में निरूपित कर सकते हैं।
यहाँव्यजंक$5p^2q-4pq^2+7$ और व्यंजक$5x^2+7xy-1$ को पेड़ आरेख द्वारा दर्शाया गया है
:

पेड़ आरेख

प्रयास कीजिए :

1. व्यंजकों ax^2+bx+cऔर $ax^2+2hxy+by2$के पद लिखिए तथा इनके वृक्ष आरेख खीचिए।

2. तीन व्यंजक लिखिए जिनमेंसे प्रत्येक में चार पद हों।

6.4 पद के गुणांक

हम जान चुके हैं कि पद को गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखते हैं। इसमें से एक गुणनखंड संख्यात्मक (numerical) हो सकता है तथा अन्य बीजीय (algebraic) हो सकते हैं। इस संख्यात्मक गुणनखंड को पद का संख्यात्मक गुणांक(numerical coefficient) या केवल गुणांक कहते हैं। इसे शेष बीजीय पद का गुणांक भी कहते हैं। इस प्रकार $5xy$में xyका गुणांक 5 है। पद $7xyz$ में xyz का गुणांक 7 है तथा$-8xy^2$में xy^2का गुणांक -8 है। विशेष ध्यान देना है कि गुणांक +1 होने पर लिखते समय (+1) छोड़ दिया जाता है। और (-1) को केवल (-)से दर्शाया जाता है। इस प्रकार $+1x$ को xऔर$-1x$ को $-x$लिखते हैं।

कभी कभी गुणांक का प्रयोग व्यापक रूप में किया जाता है। उदाहरणार्थ पद में का गुणांक 5 ***है,का गुणांक है तथा का गुणांक है। पद में का गुणांक*** 10 ***है।का गुणांक है तथा का गुणांक है। इसे शेष गुणनखंडों के गुणनफल का गुणांक कहा जाता है।***

प्रयास कीजिए

व्यंजक $6x^2+9xy+10y^2$ ***और*** p^2+pq-q^2 ***के पदों में संख्यात्मक गुणांक लिखिए।***

अभ्यास 6 (a)

निम्नलिखित व्यंजकों के पदों को लिखिए

1 .$5x+6$ **2.**$a^2-3ab-4$ **3.** $4ax+6$

4. x^2-3x-7 **5.**$5a-b$ **6.**xy^2

7. xyz ***में*** xyz ***का गुणांक ...... है*** **8.**$-3y^2$ ***में*** y^2 ***का गुणांक ...... है***

9. $\frac{-2}{3}x^2$ ***में*** $\frac{-2}{3}$ ***..... का गुणांक है***

10. ***निम्नांकित कथन सत्य हैं या असत्य*** ?

(i) $8x^2y$ ***में*** $8x^2y$ ***का गुणांक*** 8 ***है*** **(ii)** $\frac{1}{6}xyz^2$ ***में*** xyz^2 ***का गुणांक*** 1 ***है।***

6.5 *समान (सजातीय)* (like terms) *तथा असमान (विजातीय)* (unlike terms) *पद*

व्यंजक $2x-3x+5xy-4$ ***में पद*** $2xy$ ***और*** $5xy$ ***को देखिए।*** $2xy$ ***के गुणनखंड*** 2,x ***और*** y ***तथा*** $5xy$ ***के गुणनखंड*** 5, x ***और हैं। इस प्रकार इनके बीजीय (चर) गुणनखंड एक समान हैं इसलिए ये समान (सजातीय) पद हैं। अत: एक ही व्यंजक में सजातीय पद होने पर सजातीय पदों को जोड़कर सरल किया जा सकता है।***

जिन पदों के बीजीय गुणनखंड आपस में समान होते हैं, उन्हें सजातीय पद या समान पद (like terms) ***कहते हैं, जबकि उनके संख्यात्मक गुणांक अलग-अलग हो सकते हैं।***

पुन: में पद और में भिन्न - भिन्न बीजीय गुणनखंड हैं। इसलिए ये असमान (विजातीय)

पद हैं। इसी प्रकार पदऔर 4 तथा एवं 4 भी असमान पद हैं।

जिन पदों के बीजीय गुणांक आपस में समान नहीं होते हैं, उन्हें विजातीय पद या असमान पद (unlike terms) कहते हैं।

क्रियाकलाप:

शिक्षक फ़्लैश कार्ड पर विभिन्न प्रकार के चर और अचर राशियाँ लिखकर लायेंगे तथा बच्चों से समान प्रकार के चर-अचर को छांटने को कहेगा एवं सजातीय और विजातीय पदों में अंतर स्पष्ट करेंगे और व्यंजकों में पदों की गणना करने के लिए प्रोत्साहित करेंगे |

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित पदों में सजातीय एवं विजातीय पदों को विभक्त कीजिये :

10x, -8y, 5, 6xy, -12, x^2, 5y, -11xy, -9x, 1, x, y, xy

उदाहरण : निम्नलिखित युग्मों में समान पद और असमान पद वाले युग्मों को छाँटिए

(i) 6x,7y **(ii)**13x,-7x **(iii)**-5ab,7ab

(iv) 3x,6xy **(v)**$6pq^2,7p^2q$ **(vi)**$7pq^2,-4py^2$

(vii)mn^2,9mn **(viii)** -p,10p

हल :(i) दोनों के चर भिन्न हैं, इसलिए यह युग्म परस्पर असमान है।

(ii) दोनों के चर समान हैं इसलिए यह युग्म समान है।

(iii) -5ab,7abदोनों के चर समान हैं क्योंकिab=ba इसलिए यह युग्म समान है।

(iv) 3x,6xy दोनों के चर भिन्न हैं इसलिए यह युग्म परस्पर असमान हõ।

(v) $6pq^2,7p^2q$ दोनों के बीजीय भिन्न हैं, इसलिए यह युग्म परस्पर असमान हैं।

(vi) दोनों के बीजीय समान है। इसलिए यह युग्म समान हैं।

(vii) में दोनों के बीजीय भिन्न हैं।इसलिए यह युग्म परस्पर असमान है।

(viii)दोनों के चर समान है। इसलिए यह युग्म परस्पर समान है।

ध्यान दें

समान पद और असमान पद को जानने के लिए गुणांकों परध्यान न देकर केवल पद के बीजीय भाग परध्यान केन्द्रित करते हैं।

अभ्यास 6(b)

1. निम्नलिखित में सजातीय पद छाँटिए।

(i) $6x^2y, -6xyz, 8x^2y, -7xyz$

(ii) $-3pq, -5pq^2, 4q^2p, 9qp$

2. निम्नलिखित में सजातीय युग्मों पर सही (√) लगाइए।

(i) $5x, -3x$

(ii) $3ab, 7a^2$

(iii) b^2ac, ab^2c

(iv) a^2bc, ab^2c

6.6 व्यंजकों की डिग्री

किसी भी व्यंजक की डिग्री एक ऋणेत्तर पूर्णांक (non negative integer) *होती है। साथ ही साथ व्यंजक की डिग्री उस व्यंजक में प्रयुक्त चर की उच्चतम घात होती है। अर्थात् व्यंजक में पदों की भी डिग्री होती है। जैसे* $3x^2 + 5x + 1$ *में व्यंजक की डिग्री* 2 *है, जबकि पदों* $3x^2$, $5x$ *तथा* 1 *की डिग्री क्रमशः* 2, 1 *तथा* 0 *है।*

6.7 एक पदी, द्विपद, त्रिपद और बहुपद

हमने व्यंजक के पदों के सम्बन्ध में प ढ़ लिया है, वह बीजीय व्यंजक जिसमें केवल एक पद हो, एक पदी (Monomial) *व्यंजक कहलाता है, जैसे इत्यदि। एक व्यंजक जिसमें केवल दो पद हों और वे असमान पद हों, द्विपद कहलाता है। उदाहरणार्थ* $3x+2m$, $m-5$, $xy+4z$, a^2-b^2 *द्विपद हैं।ध्यान रहे* $9pq$ *व्यंजक द्विपद नहीं है, यह एक पदी है। व्यंजक* $x^3+2hxy+y^2$ *में तीन असमान पद हैं, इसलिए इसे त्रिपद* (Trinomial) *कहते हैं।*

व्यापक रूप में दो या दो से अधिक पद वाले व्यंजक को बहुपदीय व्यंजक (Polynomial) *कहते हैं।*

प्रयास कीजिए

निम्नांकित व्यंजकों को एक पदी, द्विपद और त्रिपद के रूप में व र्गीकृत कीजिए:

xyz, $x+y+z$, $5p^2+6pq+7$, $5x$, x^2-y^2, $a+b$, $-x$

$3z$, $4mn+3$, $a+5b-c$, $mn-5$, $x^2+xy+3y^2$, $7+6pq$

अभ्यास 6 (c)

1. ***निम्नलिखित व्यंजकों में पदों की संख्या बताइए*** :

(i) $13x$ (ii) $x+y$ (iii) ax^2-bx+c (iv) $3x-5z$

2. ***निम्नांकित में सत्य कथन बताइए*** :

(i) $5x^2yz$ ***द्विपद व्यंजक है***, (ii) $x^2-8x+10$ ***द्विपद व्यंजक है***

(iii) $2x^2+7xy$ ***द्विपद व्यंजक है***, (iv) ax^2+bx-c ***द्विपद व्यंजक है***o,

3. ***निम्नांकित में एकपदीय,द्विपदीय एवं त्रिपदीय व्यंजक बताइए*** :

(i) $3xy+7$ (ii) $15x^3$

(iii) $2x^2+7x-3$ (iv) $3x^2-10xy$

(v) px^2+qx-r

4. $x^2y-7xy+10$ ***पदों की संख्या की दृष्टि से कैसा व्यंजक है*** ?

5. ***नसरीन के पास*** x ***आम हैं। उसने*** $2y$ ***आम अपनी बहन एबीना को दे दिया। ज्ञात कीजिए:***

(i) ***नसरीन के पास कितने आम शेष रहे*** ?

(ii) ***शेष आमों की संख्या में कितने पद हैं*** ?

(iii) ***पदों की संख्या की दृष्टि से इसे किस प्रकार का व्यंजक कहेंगे*** ?

6.8 *बीजीय व्यंजकों का जोड़ एवं घटाना* :

आइए इसे समझने के लिए कुछ समस्याओं पर विचार करें।

1. डेविड, शालू और सलीम साथ साथ खेलते हैं, खेल खेल में डेविड शालू से कहता है कि तुम्हारे पास सलीम से 12 गोलियाँ अधिक हैं और मेरे पास तुम दोनों की गोलियों से 5 गोलियाँ अधिक हैं। डेविड के गोलियों की संख्या कैसे ज्ञात करेगें ?

- ♥ चूँकि यहाँ सलीम के पास गोलियों की संख्या ज्ञात नहीं है, इसलिए हम यहाँसलीम की गोलियों की संख्या x मान लेते हैं, अब शालू के पास सलीम से 12 गोलियाँ अधिक हैं, इसलिए शालू के गोलियों की संख्या x+12 होगी, पुनः डेविड के पास दोनों की गोलियों के योग [x+(x+12)]से 5 अधिक हैं।

इसलिए डेविड की गोलियों की संख्या = $x+x+12+5=2x+17$

2. राहुल के पिता की वर्तमान आयु राहुल की आयु की चार गुनी है। उसके चाचा की आयु उसके पिता की आयु और उसकी आयु के योग से 6 वर्ष कम है। आप राहुल के चाचा की आयु किस प्रकार ज्ञात करेंगे?

- ♥ चूकि राहुल की आयु ज्ञात नहीं है, इसलिए मान लें कि राहुल की वर्तमान आयु y वर्ष है । अब उसके पिता की आयु 4y है। अब राहुल के चाचा की उम्र ज्ञात करने के लिए राहुल और उसके पिता की आयु का योग $(y + 4y)$ ज्ञात कर उसमें6 वर्ष कम कर (घटा) देते हैं।

इसलिए राहुल के चाचा की आयु= $y + 4y - 6 = 5y - 6$ वर्ष

इसप्रकार हम देखते है कि हमारे दैनिक जीवन में अनेक ऐसी स्थितियाँ हमारे सामने आती हैं, जहाँव्यंजकों का प्रयोग कर उन पर अंकगणित की संक्रियाएँ करनी पड़ती है।

प्रयास कीजिए

दो स्थितियों को लिखिए जिनमें से दो बीजीय व्यंजकों को बनाने की आवश्यकता पड़े तथा उन्हें जोड़ना या घटाना पड़े।

6.8.1 समान पदों को जोड़ना या घटाना

हम लोगों ने इस अध्याय में समान पदों की पहचान करना सीख लिया है। अब हम यहाँपर समान पदों का जोड़ना और घटाना सीखेंगे।

आइए 5x,7x ***को जोड़ें। हम जानते हैं कि*** x***एक बीजीय संख्या है। इसलिए*** 5x ***और*** 7x ***समानपदीय संख्याएं हैं***|

$\therefore\ 5x+7x=(5+7)\ x=12\ x$

इसी प्रकार 6xy,7xy***और***xy ***को जोड़ें।***

6xy+7xy+xy=(7+6+1)xy=14xy

- 10mn***में से***5mn ***को घटाएँ।***

  10mn-5mn=(10-5)mn=5mn

- $7pq^2$***में से*** $3pq^2$***घटाएँ।***

  $7pq^2-3pq^2=(7-3)pq^2=4pq^2$

इस प्रकार, दो या अधिक समान पदों का योग एक समान पद होता है, जिसका संख्यात्मक गुणांक सभी समान पदों के गुणांकों के योग के बराबर होता है।

अब हमलोग समान बीजीय पदों को जोड़ने और घटाने की प्रक्रिया से परिचित हो चुके हैं। आइए कुछ उदाहरणों द्वारा व्यापक बीजीय व्यंजकों को जोड़ने की प्रक्रिया को जानें।

- 3a+7***और***8a-5 ***को जोड़िए।***

  योग =3a+7+8a-5

  यहाँ $3x$ ***और*** 8a***समान पद हैं इसी प्रकार*** 7 ***और*** -5 ***समान पद हैं***।

  $=3a+8a+7+(-5)$

  $=(3+8)a+7-5$

  $=11a+2$

  अत:3a+7+8a-5 $=11a+2$

- $3x^2+5xy+7y$***और***$2xy-5y$ ***को जोड़िए।***

योग $= 3x^2 + 5xy + 7y + 2xy - 5y$

$= 3x^2 + 5xy + 2xy + 7y - 5y$ (**पदों को व्यवस्थित करने पर**)

$= 3x^2 + (5 + 2)xy + (7 - 5)y$ **समान पदों को साथ लेते हैं तथा असमान पद को यथावत रखते हैं**

$= 3x^2 + 7xy + 2y$

- 4x-y+5z **में से** x-y **को घटाइए**।

अन्तर $= 4x - y + 5z - (x - y)$

$= 4x - y + 5z - x + y$

$= (4 - 1)x + (-1 + 1)y + 5z$

$= 3x + 0y + 5z$

$= 3x + 5z$

उदाहरण 1: व्यंजक $5x^2+7xy+8z+3xy-7x^2-2xy-6z-10$ को सरल कीजिए।

$5x^2+7xy+8z+3xy-7x^2-2xy-6z-10$

$=(5-7)x^2+(7+3-2)xy+(8-6)z-10$ (**समान पदों को व्यवस्थित करने पर**)

$=-2x^2+8xy+2z-10$

प्रयास कीजिए

जोड़िए और घटाइए

(i) p-2q, p+q

(ii) 3pq+5p-2, pq-4

अभ्यास 6(d)

1. बीजीय व्यंजकों को जोड़िए।

(i)8a-2b **तथा** 2a+2b (ii)7a-4b,5a+2b **तथा** -2a-3b

(iii) $19x^2-5y^2, 3x^2+5y^2$ **तथा** -2a-3b (iv) $2x^2$-y2,x^2+3y^2 **तथा** x^2-y^2

2. निम्नांकित में पहले बीजीय व्यंजक में से दूसरे बीजीय व्यंजक को घटाइए:

(i) $2xy-2y^2+3x^2+5y^2$ ***में से*** $xy+3xz-y^2$ ***को***

(ii) $4x-3y+7z$ ***में से*** $-2x-3y+7z$ ***को***

(iii) a^2-3b^2+7ab ***में से*** $-a^2-3b^2+7ab$ ***को***

3. ***निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर के सही विकल्प लिखिए।***

(a) $x-y+2x-4y$ ***का मान होगा।***

(i) $3x-4y$ (ii) $3x-5y$ (iii) $3x+5y+z$ (iv) $3x+3y$

(b) $2x+y-z-(3x+y-2z)$ ***का मान होगा।***

(i) $2x+y-z$ (ii) $x+2y+3z$ (iii) $-x+z$ (iv) $x-2z$

4. 1 ***में से*** $-3x+2y-4z$ ***को घटाइए।***

5. $a-b$ ***में क्या जोड़ा कि*** $2a+b$ ***योगफल हो जाए?***

6. $2x+y, x-2y$ ***से कितना अधिक है?***

7. ***किसी गाँव में पुरुषों की संख्या*** $6xy+5y^2-8z$ ***है, महिलाओं की संख्या*** $2x+yx-2y$ ***है। बताइये पुरुषों की संख्या महिलाओं की संख्या से कितनी अधिक है?***

8. ***डेविड प्रतिमाह*** (4x2+7y-2xy) ***ोजन पर, रु***$(-2x^2+4x+5xy)$ ***शिक्षा पर तथा रु***$(x^2-3xy$ ***किराये पर खर्च करता है। यदि उसकी मसिक आय*** $(-5x^2+4x+5xy)$ ***हो तो ज्ञात कीजिए:***

(i) ***डेविड का मसिक खर्च*** (ii) ***डेविड की मसिक बचत***

6.9. ***बीजीय व्यंजकों के मान ज्ञात करना***

हम जानते हैं कि बीजीय व्यंजक का मान, व्यंजक को बनाने वाले चरों के मान पर निर्भर करता है। अनेक स्थितियों में व्यंजकों के मान को ज्ञात करने की आवश्यकता होगी।

जब हम गणित या ज्यमिति में सूत्रों का प्रयोग करते हैं तो हमें व्यंजकों के मान ज्ञात करने की आवश्यकता पड़ती है। उदाहरणार्थ 1 ***सेमी भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल*** l^2 ***वर्ग सेमी होता है। यदि*** $l=10$ ***सेमी है तो वर्ग का क्षेत्रफल*** $10^2=100$ ***वर्ग सेमी है। आइए हम कुछ और उदाहरणों से समझें।***

उदाहरण **2-** ***निम्नांकित व्यंजकों के मान*** $x=3$ ***के लिए ज्ञात कीजिए।***

(i) $x-5$ (ii) $7x-5$ (iii) $17-x^2$ (iv) $35-2x^3$

हल : (i) x-5***में*** x=3***रखने पर***

मान = 3-5=-2-2

(ii) 7x-5 ***में*** x=3***रखने पर***

मान = 7 þ 3 - 5 = 21- 5 = 16

(iii) 17--x^2***में*** x= 3***रखने पर***

मान = 17 - (3 þ 3) = 17- 9 =8

(iv) 35- $2x^3$***में*** = 3 ***रखने पर***

मान = 35- 2 þ 3^3= 35- 2þ 3þ 3þ 3

= 35-54 = -19

उदारहण **3** :(i)$5a^2$+4a-2***और*** (ii) a^3+4a^2+3a-7***का मान ज्ञात कीजिए यदि*** a=-2

(i) $5a^2$+4a-2 ***में*** a= -2 ***रखने पर***

मान=

$$5(-2)^2+4(-2)-2$$
$$=20-8-2$$
$$=10$$

(ii) a^3+4a^2+3a-7 ***में*** a=-2***रखने पर***

$$(-2)^3+4(-2)^2+3(-2)-7$$
$$=-8+16-6-7$$
$$=16-21=-5$$

अभ्यास 6(e)

1. ***निम्नांकित के मान ज्ञात कीजिए, यदि*** x=7,y=3

(i)x+y

(ii)2x-y

(iii)3xy

(iv)$2x^2$

(v)$5x^3y$

2.*सही विकल्प छाँटिए* ।

(a) ***यदि*** l = 3 ***तो*** $(2l)^3$ ***का मान है***।

(i) 27 (ii) 216 (iii) 32 (iv) 81

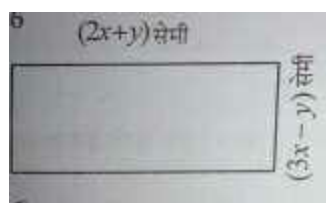
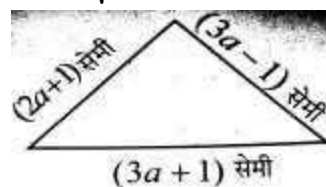
(b) ***यदि*** x=2,y=1 ***तो*** $(5xy)^2$ ***का मान है***

(i)100 (ii) 10 (iii) 50 (iv) 150

(c) ***यदि*** x=3,y=1,z=2 ***तो*** $(x+y+z)^2$ ***का मान है***

(i) 48 (ii) 24 (iii) 36 (iv) 6

3. ***यदि*** x=4,y=3 ***तो***

पार्श्व चित्र में आयत की भुजायें ज्ञात कीजिए।

4. ***यदि*** a=4 ***तो***

पार्श्व चित्र में त्रिभुज की भुजायें ज्ञात कीजिए।è

5. ***यदि*** y=-1 ***तो बीजीय व्यंजक*** $2y^2+3y^2+y-3$ ***का मान ज्ञात कीजिये***।

6. ***यदि*** a=-2,b=2 ***तथा*** c=1 ***तो बीजीय व्यंजक*** $4a^3-2abc+3bc+b^2$ ***का मान ज्ञात कीजिये***।

7. ***यदि*** a=3 ***तथा*** b=2 ***तो निम्नांकित को सत्य पित कीजिये*** :

(i) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(ii) $(a-b)=a^2-2ab+b^2$

(iii) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

6.10 *कोष्ठकों* (Brackets) *का प्रयोग*

हमने व्यंजकों का अध्ययन करते समय देखा कि किसी परिस्थिति या कथन को बीजीय व्यंजक के रूप में किस प्रकार लिखते हैं। जब किसी कथन में कई घटना

क्रम मिलकर एक संयुक्त घटना बनाते हैं तो इस प्रकार के प्रत्येक कथन को एक दूसरे से जोड़ने के लिए आवश्यकतानुसार विभिन्न प्रकार के कोष्ठकों का प्रयोग किया जाता है। आइए हम इसे उदाहरण के द्वारा समझें।

माना निखिल के पास 2xआम हैं उसने उसमें से 3yआम अपनी बहन को दे दिया। इसके बाद शेष बचे आमों का आधा करके 30 निकाल लिया। निकालने के बाद शेष का तिगुना करके पुन: 3xजोड़ दिया, जोड़ने के बाद प्राप्त आमों की संख्या मे y से गुणा कर दिया। आइए हम इस कथन को बीजीय व्यंजक के रूप में अलग अलग घटना क्रम के अनुसार किस प्रकार संयुक्त करके लिख सकते हैं, देखें :

निखिल के पास आमों की संख्या = 2x

उसके बहन के पास आमों की संख्या = 3y

शेष आम = 2x - 3y

शेष आम का आधा = $\frac{1}{2}(2x-3y)$ यहाँ पर 2x-3y का संयुक्त आधा दिखाने के लिए '( )' चिह्न का प्रयोग करना पड़ा। इसे छोटा कोष्ठक (Parentheses or Round Bracket) कहते हैं।

शेष में से 30 आम निकालने पर = $\frac{1}{2}(2x-3y)$-30

इसका 3गुना करके इस कथन को 3{ $\frac{1}{2}(2x-3y)$-30} द्वारा प्रदर्शित करेंगे। यहाँ{}चिह्न को मझला कोष्ठक (Braces or Curly Bracket) कहते हैं

पुन: उपरोक्त व्यंजक में3x जोड़ने पर लिखेंगे 3x+ 3{ $\frac{1}{2}(2x-3y)$-30}

अन्तत: सब में y से गुणा करने पर इस कथन को y[3{ $\frac{1}{2}(2x-3y)$-30}]द्वारा दर्शाएंगे, यहाँचिह्न [ ]को बड़ा कोष्ठक (Square bracket) कहते हैं।

आइये हम इन कोष्ठक युक्त व्यंजकों को सरल करने के तरीकों को उदाहरण द्वारा समझें।

उदाहरण 4:

$4x^3-[9x^2-\{-5x^3-(2-7x^2)+6x\}]$ को सरल कीजिए।

$$= 4x^3 - [9x^2 - \{-5x^3 - 2 + 7x^2 + 6x\}]$$
$$= 4x^3 - [9x^2 + 5x^3 + 2 - 7x^2 - 6x]$$
$$= 4x^3 - [5x^3 + 2x^2 - 6x + 2]$$
$$= 4x^3 - 5x^3 - 2x^2 + 6x - 2$$
$$= -x^3 - 2x^2 + 6x - 2$$

टिप्पणी:प्राय: हम रेखा कोष्ठक एवं छोटे कोष्टक ( ) को सबसे अन्तर, फिर मझला कोष्ठक {} तथाअन्त में [ ] बड़ा कोष्ठक लगाते हैं।

- *कोष्ठक खोलते समय यदि कोष्ठक के बाहर + का चिह्न होता है, तो कोष्ठक के भीतर के पदों के चिह्न नहीं बदलते हैं।*
- *यदि कोष्ठक के बाहर ऋण (-) का चिह्न हो, तो कोष्ठक खोलने पर उसके पदो के चिह्न बदल दिए जाते हैं।*
- *यदि किसी व्यंजक में एक से अधिक कोष्ठकों का प्रयोग हुआ हो, तो हम सबसे भीतर वाले कोष्ठक को पहले खोलते हैं और उसके भीतर के पदों को सरल कर लेते है। यही क्रिया सभी कोष्ठकों को हटाने तक करते हैं।*
- *दो या दो से अधिक कोष्ठकों के बीच यदि कोई चिह्न न हो तो वहाँगुणा का चिह्न मानते हैं।*

प्रयास कीजिए

2x-[5y-{-3x+y(7-x)}]*को सरल कीजिए।*

अभ्यास 6(f)

1. *निम्नांकित कथनों में कोष्ठकों का प्रयोग कीजिए:*

(i) 3x***तथा*** 4***के योग में से*** 5y***घटाइए।***

(ii) 4pq***में*** 7r***को जोड़िये तथा प्राप्त मान का आधा कीजिए।***

(iii) 3 xy***तथा*** 7yz ***के योग के तिहाई में*** $3z^2y$***जोड़िए।***

2. *प्रत्येक प्रश्न के चार उत्तर दिए गये हैं। सही उत्तर को अपनी अभ्यास पुस्तिका में लिखिए:*

(i) $(5x+(2x-3)$ ***को सरल करने पर प्राप्त होता है:***

(a) $3-7x$ (b) $3x-3$ (c) $7x+3$ (d) $7x-3$

(ii) $a-(b-2a)$ ***को सरल करने पर प्राप्त होता है:***

(a) $3a-b$ (b) $3b-a$ (c) $a-b$ (d) $3a-b$

(iii) $(a+b+c)-(a+b-c)$ ***को सरल करने पर प्राप्त होता है:***

(a) $2a+2b$ (b) $2c$ (c) $2b+2a$ (d) $2c-b$

(iv) $-2x^2-(-x^2+4x)$ ***को सरल करने पर प्राप्त होता है:***

(a) $-x^2-4x$ (b) x^2-4x (c) $-x_2+4x$ (d) x^2+4x

3. ***निम्नांकित को सरल कीजिए:***

(i) $(a^2+8ab+5)+(3ab-4a^2+8)$

(ii) $(x+y+z)-(x-y+z)$

(iii) $x^2+\{2x^2+(x^2-y^2)\}$

(iv) $2p-\{3q+(5p-q+2p)\}$

(v) $5xy+[3z-\{2x-(2z-3y)\}]$

(vi) $2x^2yz-[3x^2-\{2y-(x2yz-\overline{y^2+x^2})\}]$

(vii) $a-[(a^2-5b)-2\{2a^2-(3c-2b)\}]$

4. ***निम्नांकित व्यंजकों में आन्तिम दो पदों को कोष्ठक में लिखकर पहले ऋण चिह्न इस प्रकार लगाइए कि व्यंजक का मान न बदले:***

(i) $-p+r+x^2+q2-a^2$

(ii)$a+b+c-ab-bc-ca$
(iii)$3xy-5pq+3y^2-4x+7$

दक्षता अभ्यास **6**

1. *निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों के सभी पद लिखिए*:

(i)$3x-7y+9$

(ii) $2a^2+5a-3b^2$

2. *निम्नांकित में के गुणांक बताइए*:

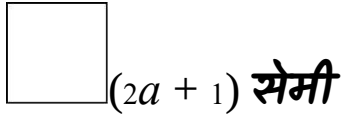
(i)$3x$

(ii)$-a^2x$

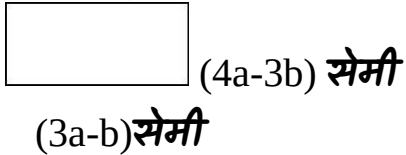
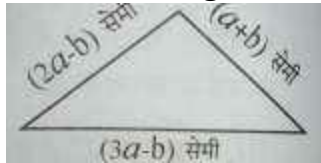
(iii)$5xy^2$

(iv) $-pqx$

3. *निम्नलिखित में सजातीय पदों को छाँटिए*:
(i) $a^2,b^2,3a^2,c^2$
(ii) $-3xy,yz,7x,2xy$
(iii)$czab^2,a^2bc,b^2ac,ab^2,acb^2$
(iv)$7m^2n,m^2n,-nm^2,m^2n^2,7nm^2$
4. *सरल कीजिए* -
(i)$(x-2y)+(3y-x)-(3x-2y)$
(ii)$3mn^2-(5m^2n^2)+(-7mn^2)-(2m^2n^2)$
(iii)$15x-[8x^3+3x^2-\{8x^2-(4-2x-x^3)-5x^3\}-2x]$
5. *दी गई आकृतियों का परिमाप ज्ञात कीजिए, यदि*
(i) ***पार्श्व आकृति में वर्ग की भुजा दी गई है।***

$(2a + 1)$ **सेमी**

(ii)**पार्श्व आकृति में आयत की भुजायें दी हैं।**

(4a-3b) **सेमी**

(3a-b)**सेमी**

(iii) **पार्श्व आकृति में त्रिभुज की भुजायें दी हैं।**

6. यदि a=-4, b=-2, c=-1,d=6 **तो**

$$\frac{(c^2 - d^2)}{a+b+c}$$

का मान ज्ञात कीजिए।

7. यदि A=7 $a^2+5ab-9b^2$, B=$-4a^2+ab+5b^2$, C=$4b^2-3a^2-6ab$ **तो दिखाइए** A+B+C=0

8. सरल कीजिए :

(i) 3**a**bc-2 **a**aaab^2-5 **a**bc+3 **a**b^2

(ii)$5x^2-2xy+3x^2+5xy-9x^2$

9. यदि a=2,b=1 **तथा** c=3 **तो** $(2a+4b-c)^3$ **का मान ज्ञात कीजिए:**

10.अपनी अभयास पुस्तिका में A **समूह के व्यंजकों को सरल करने पर प्राप्त सही उत्तरों को समूह** B **में छाँटकर सुमेलित कीजिए:**

समूह A	**समूह** B
(1) $(x+y)+(2x-3y)$	(i) $x^2-\frac{5}{3}y^2$
(2) $(x-y)-(x+y)$	(ii) $3x-2y$
(3) $x^2+2xy+y^2-(x^2+y^2-2xy)$	(iii) x^2+3y^2
(4) $2(x^2+y^2)-(x^2-y^2)$	(iv) $-2y$
(5) $(3x^2-y^2)-2(x^2+\frac{y^2}{3})$	(v) $4xy$

इस इकाई से हमने सीखा

1. *कोई चर या अचर संख्या अथवा मौलिक गणितीय संक्रियाओं के चिह्नों से युक्त चर या अचर संख्याओं का समूह बीजीय व्यंजक कहलाता है।*
2. *कोई आंकिक संख्या अथवा अक्षर संख्या अथवा इनके गुणनफल या भागफल को पद कहते हैं।*
3. *किसी पद में अंकीय गुणनखंड शेष गुणनखंड का संख्यात्मक गुणांक तथा शेष गुणनखंड अंकीय गुणनखंड का बीजीय गुणनखंड कहलाता है।*
4. *जिन पदों में बीजीय गुणनखंड आपस में समान होते हैं, उन्हें सजातीय पद या समान पद कहते हैं, जबकि उनके संख्यात्मक गुणनखंड अलग अलग हो सकते हैं।*
5. *जिन पदों के बीजीय गुणनखंड आपस में समान नहीं होते, उन्हें विजातीय पद या असमान पद कहते हैं।*
6. *जिन व्यंजकों में एक पद होते हैं, उन्हें एक पदीय व्यंजक कहते हैं।*
7. *जिन व्यंजकों में दो पद होते हैं, उन्हें द्विपद या द्विपदीय व्यंजक कहते हैं।*
8. *जिन व्यंजकों में तीन पद होते हैं, उन्हें त्रिपदीय व्यंजक कहते हैं।*
9. *सजातीय पदों का योगफल अथवा अन्तर एक अन्य सजातीय पद होता है, जिसका संख्यात्मक गुणांक उनके पदों के संख्यात्मक गुणांकों के योग अथवा अन्तर से प्राप्त होता है।*
10. *चार प्रकार के कोष्ठकों का प्रयोग किया जाता है, रेखा कोष्ठक , छोटा कोष्ठक* '( )' , *मझला कोष्ठक* '{}', *बड़ा कोष्ठक* '[ ]'।
11. *कोष्ठक खोलते समय यदि कोष्ठक के पहले* '+' *का चिह्न होता है, तो कोष्ठक के भीतर के पदों के* '+' *और* '- ' *चिह्न नहीं बदलते हैं, किन्तु यदि कोष्ठक के बाहर* '- '*का चिह्न हो, तो कोष्ठक के भीतर के* '+' *और* '- '*चिह्न क्रमश:* '- ' *तथा* '+' *चिह्न में बदल जाते हैं।*
12. *यदि किसी व्यंजक में एक से अधिक कोष्ठकों का प्रयोग हुआ हो, तो हम सबसे भीतर वाले कोष्ठक को पहले खोलते हैं और उसके भीतर के पदों को सरल करते हैं। यही क्रिया सभी कोष्ठकों को हटाने तक करते हैं।*
13. *दो या दो से अधिक कोष्ठकों के बीच यदि कोई चिह्न न हो, तो वहाँगुणा का चिह्न मानते हैं।*

उत्तरमाला

अभ्यास 6 (a)

1. $b=9$ **पेंसिलें**ö, 2. a^2, -3ab, -4, 3. 4ax,6 4. x^2,-3x,-7 5. 5a,-b, 6. xy^2, 7. 1, 8. -3, 9. xy^2, 10. (i) **सत्य** (ii) **असत्य** ।

अभ्यास 6 (b)

1. (i)($6x^2y$,$8x^2y$), (-6xyz,-7xyz) (ii) (-3pq,9pq), (-$5pq^2$,$4pq^2$) 2. (i), (iii),

अभ्यास 6 (c)

1. (i) **एक**, (ii) **दो** ,(iii) **तीन**, (iv) **चार** , 2. (i) **असत्य** , (ii)**असत्य** , (iii) **सत्य** , (iv)**असत्य** 3.(i)**द्विपदीय**, (ii)**एकपदीय**, (iii)**त्रिपदीय**, (iv)**द्विपदीय** , (v) **त्रिपदीय**, 4. **त्रिपदीय**, 5. (i)$3x-2y$ (ii) **दो**, (iii)**द्विपदीय**

अभ्यास 6 (d)

1. (i)10a, (ii) 10a- 5b, (iii)$22x^2-2a-3b$,(iv) 4x^2+y^2, 2.(i)$3x^2+4y^2+x-3x$, (ii) $6x$, (iii) $2a^2$, 3. (a) (ii), (b) (iii), 4. $1+3x-2y+4z$, 5. $a+2b$, 6. $x+3y$, 7 $5y^2+5xy-8z-2x+2y$., 8. (i) **मासिक खर्च** $3x^2+7y+4x$, (ii) **मासिक बचत** - $8x^2+5x-7y$ ।

अभ्यास 6 (e)

1. (i)10, (ii)11, (iii)63, (iv)98, (v) 5145, 2. (a) ii, (b) i,(c) iii, 3. **लम्बाई** 11 **सेमी**,**चौड़ाई** 9 **सेमी**,
4. 9 **सेमी**, 13 **सेमी**, 11 **सेमी** , 5. 1; 6. -14

अभ्यास 6 (f)

1. (i)$(3x+4z)-5y$, (ii)$\frac{(4pq+7r)}{2}$, (iii) $\frac{(3xy+7yz)}{3}+3z^2y$, 2. (i) d, (ii) d, (iii) b, (iv) a, 3. (i) $-3a^2+11ab+13$, (ii) 2y, (iii)$4x^2-y^2$(iv) (-5p -2q), (v) -2x-3y+5z+5xy, (vi) $x^2yz-2x^2+y^2+2y$, (vii) $3a^2+a+9b-6c$, 4. (i) $-p+r+x^2-(-q^2+a^2)$, (ii) ,a+b+c-ab-(bc+ca), (iii) $3xy-5pq+3y^2-(4x-7)$

दक्षता अभ्यास 6

1. (i)$3x,-7y,9$, (ii)$2a^2,5a,-3b^2$, 2.(i) 3, (ii) $-a^2$, (iii) $5y^2$, (iv) $-n$, 3. (i)a^2, $3a^2$, (ii) $-3x, 2x$, (iii) cab^2, b^2a, acb^2, (iv) $7m^2n, m^2n, -m^2, 7m^2$, 4. (i) $-3x+3y$, (ii) $-7m^2n^2-4m^2$, (iii) $-12x^3+5x^2+19x-4$, 5. (i)28 **सेमी**, (ii) 26 **सेमी**, (iii) 16 **सेमी**, 6. 5, 8.(i) ab^2-2abc (ii). $-x^2+3x$ 9. 125, 10. 1. → (ii), 2.→ (iv), 3.→ (iv),
4.→ (iii), 5.→ (i)

इकाई : 7 ज्यामितीय अवधारणाएँ

- बिन्दु
- संरेख बिन्दु (एक रेखीय बिन्दु)
- एक बिन्दुगामी रेखायें
- तल (समतल) के गुण
- बन्द और खुली आकृतियाँ

7.1 भूमिका

सृष्टि के अखण्ड स्वरूप और उसकी विशेषताओं के विविध आयामों को समझने और अन्य को समझाने में विभिन्न आकृतियों का अप्रतिम योगदान है। ज्यामिति का जन्म और उसका क्रमिक विकास मनुष्य के प्रकृति-प्रेम और उसमें उसके धार्मिक भावनाओं के झुकाव के कारण हुआ। मनुष्य को माँ की गोद से ही अपने प्रिय ज्यामितीय आकृतियों की अनुभूति है। जैन ग्रन्थों ने गणित को 'श्रेष्ठ कमल' कहा है। शब्द ज्यामिति" (Geometry) यूनानी शब्द जिओमीट्रोन (Geometron) से बना है। जियो (Geo)का अर्थ है भूमि और मीट्रोन (metron) का अर्थ है मापना। इतिहासकारों के अनुसार प्राचीन समय में ज्यामितीय अवधारणाएँ कला, वास्तु कला, शिल्प कला (Architecture)और भूमि मापन की आवश्यकताओं के कारण विकसित हुई। यज्ञों के लिए विभिन्न आकार की वेदियों को बनाने, भूमि का आवश्यकतानुसार सीमांकन करने, वद्रभव पूर्ण राज भवनों, मन्दिरों, झीलों, बाँधो और नगरों के निर्माणों, कला और वास्तुकला (या शिल्प) ने इन अवधारणाओं को और उजागर किया। वर्तमान आधुनिक युग में कला, मापन वास्तुकला, इंजीनियरिंग (Engineering), कपडों के डिजाइन इत्यदि के सभी रूपों मे

ज्यामितीय अवधारणाओं का प्रभाव देखा जा सकता है। आप विभिन्न प्रकार की वस्तुओं जैसे बाक्स(पेटी), मेज, पुस्तक, अपने स्कूल में लंच ले जाने के लिए डिब्बे, गेंद जिससे आप खेलते हैं,आदि देखते हैं और उनका प्रयोग करते हैं। आप इन सभी वस्तुओं के भिन्न-भिन्न आकार (shape)पाते हैं। चित्र को बनाने में जो रूलर (Ruler) और पेंसिल आप प्रयोग करते हैं वे सीधे (Straight) हैं। एक रुपये का सिक्का, एक सीडी (Compact Disk) वृत्ताकार (Circular) होते हैं।

गणितज्ञों के अभिमत में किसी ज्यामितीय रचना की मूल इकाई या स्रोत आकृति बिन्दु (Point) माना गया है। महान गणितज्ञ यूक्लिड ने सर्वप्रथम अपनी पुस्तक एलिमेंटस (Elements) में सैद्धान्तिक अवधारणाओं से सम्बन्धित ज्यामितीय आकृतियों को संकल्पित तथा संकलित करने का अभूतपूर्व कार्य किया तथा ज्यामिति विषय की आधारशिला रखी, जो निम्न हैं :

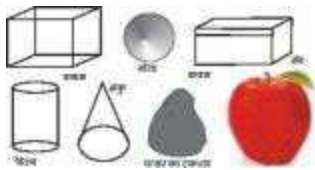
- एक बिन्दु (Point) वह है जिसका कोई भाग नहीं होता।
- एक रेखा चौड़ाई रहित लम्बाई होती है।
- एक रेखा-खण्ड के सिरे बिन्दु होते हैं।
- एक सीधी रेखा ऐसी रेखा है जो स्वयं बिन्दुओं के साथ सपाट रूप से स्थित होती है।
- एक तल वह है जिसकी केवल लम्बाई और चौड़ाई होती है।
- एक समतल (Plane Surface) ऐसा पृष्ठ होता है जो स्वयं पर सपाट रूप से स्थित होता है।

अब यहाँ पर ध्यान देना आवश्यक है कि प्रमुख ज्यामितीय आकृतियाँ यथा बिन्दु, रेखा या तल के ज्यामितीय अंकन और आरेखण में अब तक ज्यामितीय विद्वानों को पर्याप्त 'विषमताओं और विवशताओं का सामना करना पड़ा है। अतएव परिस्थिति जन्य स्थितियों में गणितज्ञों ने इन आकृतियों को निरूपण के स्तर पर अपरिभाषित (Undefined) मान कर ज्यामितीय अध्ययन को आगे बढ़ाने और समृद्ध करने की दृष्टि से बिन्दु को सूक्ष्म से सूक्ष्म बिन्दी (Dot) के रूप में प्रचिलत कर स्थापित किया। अब इसी प्रकार रेखा एक पतली से पतली (Very Fine) लम्बाई की आकृति

है जबकि, तल अनगिनत रेखाओं के परस्पर संयोजन का परिणामी है। वास्तव में ज्यामितीय परिभाषानुसार बिन्दु अपने आदर्श रूप में विमामुक्त आकृति है, परन्तु रचना के स्तर पर ऐसा सम्भव नहीं है।

अब यहाँ कुछ ऐसे रोचक तथ्यों के बारे में पढ़ेगें, जिनसे आपको अपने चारों ओर के परिवेश में उपस्थित विभिन्न आकारों के बारे में अधिक मौलिक व विस्तृत जानकारी मिलेगी।

हम दैनिक जीवन में अपने आस पास अनेक आकार की वस्तुओं को देखते हैं। ये आकार वक्रों या रेखाओं से मिलकर बने होते हैं। आइए हम नीचें दी गई कुछ वस्तुओं की आकृतियों को देखें और सोचें।

- *चित्र में घनाभ तथा बाक्स की आकृति को देखने से ज्ञात होता है कि इसमें प्रत्येक के* 6 *पृष्ठ हैं जिन्हें फलक कहते हैं। प्रत्येक फलक के चार कोने होते हैं जिन्हें शीर्ष कहते हैं।*

- *गोला और सेब की आकृति को देखिए, इसमें कोई स्पष्ट फलक नहीं है। अत: इनके तल वक्र है। इसे वक्रतल या वक्र पृष्ठ कहते है |*
- *बेलन, शंकु में कोई सीधा किनारा नहीं है, बेलन और शंकु का आधार वृत्ताकार है, यह तल सपाट या समतल है। उनके सिरे के तलों को छोड़कर शेष तल वक्र है। पत्थर के टुकड़े का ऊपर वाला तल वक्र है।*

प्रयास कीजिए

(a) *अपने परिवेश में पाये जाने वाली तीन-तीन वस्तुओं के नाम लिखिए जिनके पृष्ठ* (1) *सभी समतल* (2) *सभी वक्रतल और* (3) *कुछ समतल और कुछ वक्र तल हों।*

(b) *निम्नांकित आकृतियों के तलों के नाम और संख्या बताइए।*

चर्चा कर निष्कर्ष निकलिए :

प्रत्येक वस्तुओं के पृष्ठ या तल होते हैं। ये तल दो प्रकार के होते हैं :

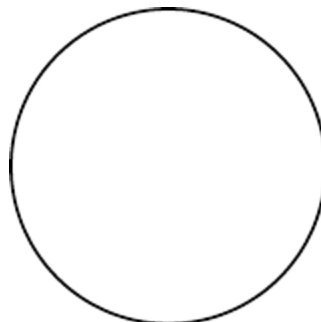
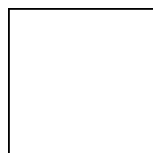
(1) **समतल** (2) **वक्रतल**

- *सपाट पृष्ठ को समतल कहते हैं।*
- *वक्राकार पृष्ठ को वक्रतल कहते हैं।*

क्रिया कलाप:

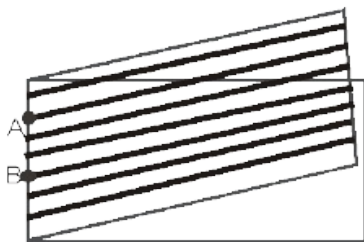
अपनी उत्तर पुस्तिका पर घनाभ, घन और रुपये का सिक्का रखकर पेंसिल से निशान लगाइए। और इनसे बनने वाली आकृतियों पर विचार कीजिए ?

हम देखते है कि क्रमश: आयात, वर्ग एवं वृत्त बनते हैं। ये सभी चित्र कागज के एक तल पर हैं अर्थात इन आकृतियों के तल कागज के एक बड़े तल पर हैं। कागज के तल को असीमित रूप से सभी दिशाओं में फैला हुआ माना जा सकता है।

अत: समतल असीमित रूप में सभी दिशाओं में फैला होता है।

क्रिया कलाप :

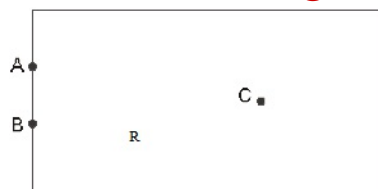
एक कागज लेकर उसे बीच से मोंड़िए। मोड़ वाले भाग (क्रीज) पर दो बिन्दु A और B लीजिए।मुड़े हुए कागज से कितने तल बन सकते हैं। कागज केक्रीज को स्थिर रखते हुए कागज के दोनों भागों को मोड़ के चारो तरफ घुमाइए। हम देखते हैं कि कागज के तल की भिन्न-भिन्न स्थितियाँ बनती हैं और प्रत्येक स्थिति एक समतल को निरूपित करती है। इस प्रकार जैसे-जैसे कागज को घुमाते जाते हैं वैसे वैसे नये समतल निरूपित होते जाते है। फलत: क्रीज के परित: कागज को घुमाकर असंख्य समतल बनाये जा सकते हैं।

निष्कर्ष :

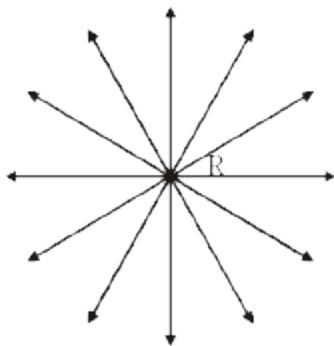
दो बिन्दुओं से होकर असंख्य समतल जाते हैं।

7.2 समतल का निरूपण

एक समतल को व्यक्त करने के लिए कम से कम तीन असंरेख बिन्दुओं की आवश्यकता होती है। उपर्युक्त क्रिया कलाप से हम देखते हैं कि कागज के मोड़ पर लिए गये दो बिन्दु A और Bके परित: कागज को घुमाने पर विभिन्न स्थितियों में अलग-अलग समतल बनते हैं। यदि बिन्दु A और Bसे असंरेख कोई बिन्दु C ले लेते हैं तो कागज की स्थिति स्थिर हो जाती है। इस प्रकार इस स्थिति में कागज एक और केवल एक ही समतल को निरूपित करेगा जैसा कि दिये गये चित्र से स्पष्ट है।

निष्कर्ष :

तीन असंरेखीय बिन्दुओं से एक और केवल एक ही समतल खींचा जा सकता है।

समतल के गुण

क्रिया कलाप:

अपनी अभ्यास पुस्तिका के किसी पृष्ठ पर कोई एक बिन्दु Rलीजिए। क्या आप बता सकते हैं कि बिन्दु R से कागज के तल पर कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं। हम देखते हैं कि बिन्दु R से कागज के तल पर असंख्य (अनगिनत) रेखाएँ खींची जा सकती हैं जैसा कि चित्र में देख रहे हैं।

निष्कर्ष:

समतल में स्थित किसी एक बिन्दु से उसी तल पर असंख्य रेखाएं खींची जा सकती हैं।

क्रिया कलाप :

पुनः कागज के तल पर दो बिन्दु P और Qलें पहले हमने देखा कि बिन्दु P से कागज के तल पर असंख्य रेखाएं खींच सकते हैं इसी प्रकार बिन्दु Q से भी स्वतन्त्र रूप से कागज के तल पर असंख्य रेखाएं खीच सकते हैं।

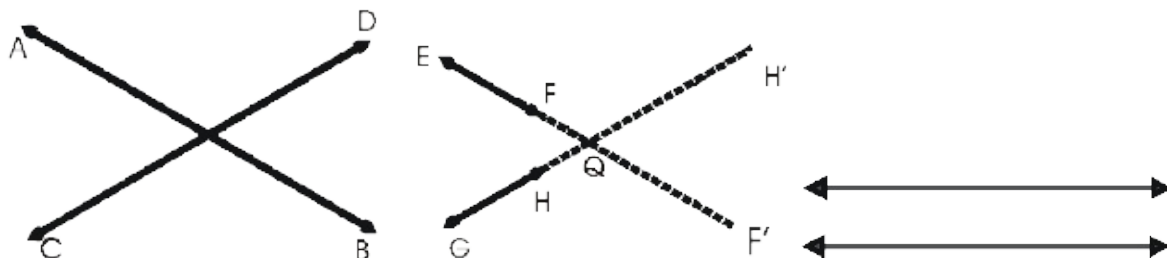
जैसे कि चित्र में देख रहे हैं, बिन्दु P और Q से केवल एक ही रेखा खींच सकते हैं।

सोचें और निष्कर्ष निकालें

समतल में स्थित दो बिन्दुओं से एक और केवल एक रेखा खींची जा सकती है और यह रेखा दो बिन्दुओं के तल में होती है। समतल में दो बिन्दुओं से जाने वाली रेखा का प्रत्येक बिन्दु तल पर ही स्थित होता है। रेखा का कोई बिन्दु तल से बाहर नहीं होता है।

एक समतल में दो रेखाओं (रेखा युग्म) के गुण

क्रिया कलाप:

कक्षा के शिक्षर्थियों से अपनी-अपनी उत्तर पुस्तिका के किसी पृष्ठ पर रेखाओं के जोड़े खींचने को कहें। उनके द्वारा खींची गयीं रेखाओं की स्थितियाँ निम्नवत् होगी।

देखते हैं :

(i) ***रेखा युग्म एक दूसरे को किसी बिन्दु पर प्रतिच्छेदित करते है।***

(ii) ***रेखा युग्म को ब ढ़ाने पर एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करते है।***

(iii) ***यदि रेखा युग्म किसी दशा में प्रतिच्छेदित नहीं करते हैं तो रेखाओं को समांतर रेखाएं कहते हैं।***

निष्कर्ष :

एक ही तल में स्थित रेखाएं परस्पर प्रतिच्छेदित करती हैं अथवा समांतर होती है।

अभ्यास **7(a)**

1. ***निम्नलिखित शब्दों में से उपयुक्त शब्द चुनकर रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए:***

(***असंख्य***, ***एक***, ***वक्र***)

(a) ***समतल में स्थित दो बिन्दुओं से होकर*** ....***रेखा खींची जा सकती है।***

(b) ***समतल में स्थित किसी रेखा में***..............***बिन्दु होते हैं।***

(c) ***गोले का तल***...............***होता है।***

(d) ***समतल में स्थित एक बिन्दु से होकर***.....................***रेखाएँ खींची जा सकती हैं।***

2. ***निम्नलिखित कथनों में सही कथन के सामने कोष्ठक में सही चिह्न*** (√) ***तथा गलत कथन के सामने क्रास का चिह्न*** (x) ***लगाइए*** :

(a)***कागज का तल समतल है।*** ( )

(b)***तीन असंरेखीय बिन्दुओं से असंख्य समतल खींचे जा सकते है।*** ( )

(c) ***समतल में स्थित दो रेखाएँ स दैव समान्तर होती है।*** ( )

(d) कमरे की दीवार का तल समतल है। ( )

3. स्तम्भ A एवं B में सही जोड़े का मिलान कीजिए:

स्तम्भ A स्तम्भ B

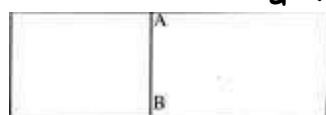
1. लोब
2. स्टील आलमारी P समतल
3. खीरा
4. लोहे का पाइप Q समतल और वक्रतल
5. शंकु
6. श्यामपट का तल
7. ठोस बेलन R वक्रतल
8. काँच की गोली

4. ठोस बेलन में कितने समतल एवं वक्रतल होते हैं?

5. समतल के तीन गुण बताइए।

6. समतल वाली वस्तुओं एवं वक्रतल वाली वस्तुओं के चार उदाहरण दीजिए।

7.3 रेखाखंड

एक कागज का पन्ना लें, मोड़ें और भली प्रकार से दबाएँ। क्या आपको कागज पर कोई मोड़ का निशान दिखाई देता है ? जैसा कि चित्र में दिखाया गया है, कागज पर AB ' एक क्रीज (मोड़) दिखाई देता है, जो एक रेखाखंड का आभास कराता है जिसके A और B दो अंत्य बिन्दु (End Points) हैं। चित्र में रेखाखंड को $\overline{AB}$ या $\overline{BA}$ द्वारा व्यक्त करते हैं।

एक धागा लीजिए और समतल पर अपने दोनों हाथों से उसके दोनों सिरों को पकड़ कर खींचे तकि वह पूर्ण रूप से सीधा हो जाय, धागे की यह स्थिति एक रेखाखंड को निरुपित करती है, तथा हाथों से पकड़े हुए सिरे इस रेखाखंड के अंत्य बिन्दु हैं। रेखाखंड AB को $\overline{AB}$ या $\overline{BA}$ द्वारा व्यक्त करते हैं।

प्रयास कीजिए

उपर्युक्त आकृतियों में रेखाखंड का आभास कराने वाले भागों के नाम बताइए -

रेखा:

कल्पना कीजिए कि निम्नांकित चित्रानुसार रेखाखं[(AB) कोA से एक दिशा में और B से आगे दूसरी दिशा में बिना किसी अंत के विस्तृत किया गया है।

ध्यान दें

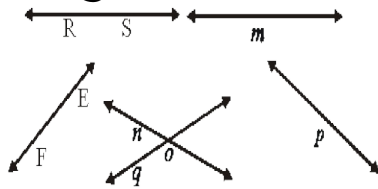
रेखा AB के दोनों सिरों पर तीर की नोंक के चिह्न बने हैं जो यह प्रदर्शित करते हैं : कि रेखा का कोई आन्तिम बिन्दु नहीं होता है। यह दोनों दिशाओं में अनन्त तक पैŠली हुई है। रेखा को दो विधियों द्वारा प्रदर्शित करते हैं : यदि रेखा पर दो बिन्दु P और Q
दिये गये हैं तो रेखा को PQ द्वारा और बिन्दु न दिये जाने पर अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षर से निरुपित करते है। जैसे- रेखा l, रेखा m, रेखाn---------- आदि।

रेखा **PQ**

रेखा **l**

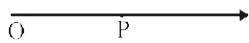
निष्कर्ष :

1. रेखा सीधी होती है जिसका दोनों दिशाओं में विस्तार अपरिमित होता है।
2. रेखा मेंअन्त्य बिन्दु नहीं होता है।
3. रेखा के किसी एक भाग को रेखाखन्ड कहते हैं, जिसमें दोनों ओर अन्त्य बिन्दु होते हैं।
4. ज्यामिति में रेखा से हमारा आभिप्राय सम्पूर्ण रेखा से होता है न कि उसके एक भाग से।

प्रयास कीजिए
नीचे कुछ रेखाएँ खींची गई हैं, उनके नाम लिखिए -

किरण (Ray):
निम्नांकित चित्रों को देखिये और सोचिए।

दीपक से निकली प्रकाश की किरणें सूर्य की किरणें टार्च से निकली प्रकाश की किरणें

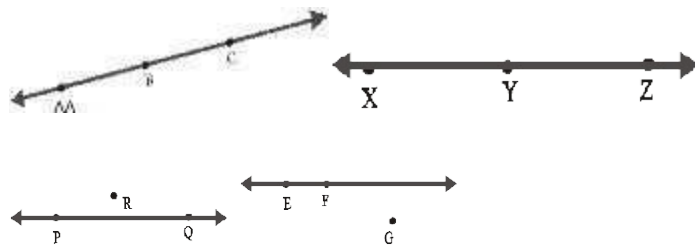
चित्र से स्पष्ट है कि किरण रेखा का एक भाग है। यह एक बिन्दु से प्रारम्भ होती है (जिसे प्रारंभिक बिन्दु (Initial point)कहते हैं) और एक दिशा मेंअन्त्यहीन होती है, जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। O प्रारम्भिक या निगमन बिन्दु है और P किरण

पर कोई अन्य बिन्दु है। किरण को $\overrightarrow{OP}$ से व्यक्त करते हैं।

प्रयास कीजिए

तीन किरणें खींचिए जिनका निगमन बिन्दु O हो।

7.4 संरेख बिन्दु (एक रेखीय बिन्दु)

इनपर चर्चा कीजिए और निष्कर्ष निकलिए :

1. कागज के तल पर तीन बिन्दुओं को अलग-अलग समूह, (i)A, B और C (ii) X, Y और Z (iii)P,Q और R तथा (iv) E, F और G निम्नवत् अंकित कीजिए। प्रत्येक समूह के किन्हीं दो बिन्दुओं, जैसे (i)A और B (ii) X तथा Y (iii) P औरQ तथा (iv) E और F से जाने वाली रेखाएं खींचिए।

ध्यान दें

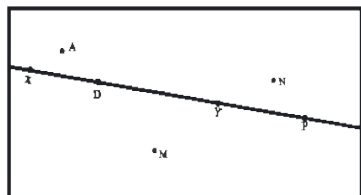
1.उक्त रेखाओं को देखने पर दो तरह की स्थितियाँ स्पष्ट होती हैं जिसमें हमें निम्नलिखित निष्कर्ष प्राप्त होते हैं:

i. समूह के तीनों बिन्दु एक ही रेखा पर हैं अर्थात समूह के तीनों बिन्दुओं से होकर रेखा जाती है। जैसे समूह A,B,C से एक और समूह X, Y, Z से दूसरी दूरी रेखा जाती है।

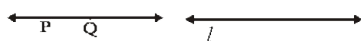
ii. समूह के तीनों बिन्दु एक ही रेखा पर नहीं हैं। जैसे- समूह P,Q,R में बिन्दु R रेखा PQ के बाहर है तथा समूह E,F,G में बिन्दु G रेखा EF के बाहर है।

एक तल में स्थित तीन या तीन से अधिक बिन्दु संरेख (एक रेखीय बिन्दु) कहलाते हैं, यदि वे सभी एक ही रेखा पर स्थित हों।

क्रिया कलाप :

कागज के तल पर कई बिन्दु A, D, M, N,P,X *तथा* Y *चित्रवत् अंकित कीजिए। उसे मोड़कर इस तरह दबायें कि मोड़ पर दो बिन्दु* X *तथा* D *अवश्य पड़ें। कागज को खोलकर देखने से अन्य बिन्दुओं की स्थिति स्पष्ट हो जाती है कि ये इस रेखा पर स्थित हैं या नहीं। हम पाते हैं कि बिन्दु* X, D, Y *तथा* P *रेखा पर स्थित हैं। अतः हे संरेख बिन्द जबकि बिन्दु* A, N, *तथा* M *इस रेखा से बाहर हैं। स्पष्टत*: A, D, M, N, P, X *तथा* Y *असंरेख बिन्दु हैं।*

ध्यान दें

दोनों सिरों पर तीर की नोंक के चिह्न बने हैं जो यह प्रदर्शित करते हैं कि रेखा का कोई आन्तिम बिन्दु नहीं होता है। यह दोनों दिशाओं में अनन्त तक पैŠली हुई है। इस रेखा को PQ *अथवा अंiरेजी के छोटे अक्षर* ℓ *से प्रदर्शित कर सकते हैं।*

P Q l

हमने क्या चर्चा की

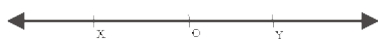
1. *रेखा सीधी होती है जिसका दोनों दिशाओं में विस्तार अपरिमित होता है।*

2. *रेखा मेंअन्त्य बिन्दु नहीं होता है। यदि रेखा पर दो बिन्दु* A *और* B *लिए जाय*ú *तो रेखा* AB *को* 1782.png *से प्रदर्शित करते हैं।*

3. *रेखा को अंiरेजी वर्णमाला के किसी छोटे अक्षर जैसे* ℓ *, m, n आदि को लिखकर भी प्रदर्शित किया जा सकता है।*

4. *रेखा के किसी एक भाग को रेखाखंड कहते हैं जिसमें दोनों ओरअन्त्य बिन्दु होता है। यदि रेखाखंड के दोनोंअन्त्य बिन्दु* A *और* B *हैं तो इसे* $\overline{AB}$ *से निरूपित करते हैं।*

5. *ज्यामिति में रेखा से हमारा आभिप्राय सम्पूर्ण रेखा से होता है न कि उसके एक भाग से।*

X O Y

इन्हें कीजिए, चर्चा कीजिये और निष्कर्ष निकलिए :
कागज पर एक रेखा XY *खींचकर उसपर एक बिन्दु* O *अंकित कीजिए।*
हम देखते हैं कि रेखा के दो भाग हो गये। रेखा का एक भाग जिस पर बिन्दु O *तथा रेखा के वे सभी बिन्दु सम्मिलित हैं जो बिन्दु* O *के बायीं ओर है तथा रेखा का दूसरा भाग जिस पर बिन्दु* O *तथा रेखा के वे सभी बिन्दु सम्मिलित हैं जो बिन्दु* O *के दायाé ओर हैं। ये दोनों भाग अगल-अलग दो किरणें, किरण* OX *तथा किरण* OY *प्रदर्शित करते हैं। बिन्दु* O *को इन किरणों का निगमन बिन्दु कहते हैं। इनकी आकृतियाँ ऊपर दर्शित हैं। न्हे हम क्रमश:* $\overrightarrow{OX}$ ***और*** $\overrightarrow{OY}$ ***से निरूपित करते हैं।***

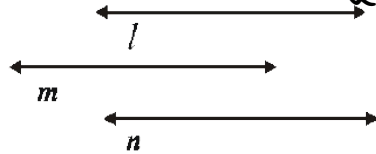
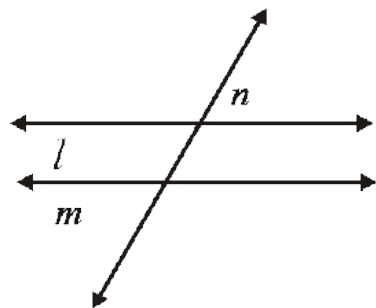
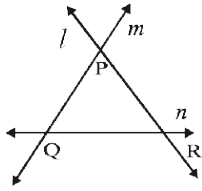
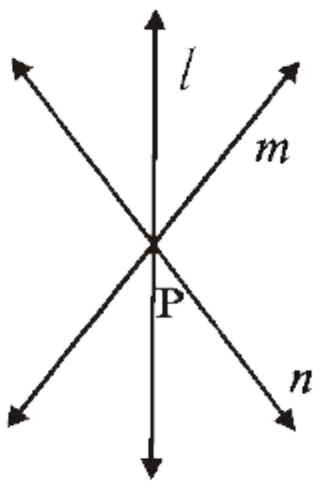
7.5 *एक बिन्दुगामी रेखाएँ*

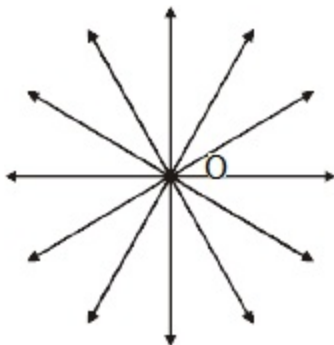
समतल पर कोई तीन रेखाएँ लेने पर निम्नांकित चार स्थितियों में से कोई एक ही स्थिति बनेगी।

1. *तीनों रेखाएँ एक दूसरे के समान्तर हो सकती हैं।*

l

m

n

2.*तीनों रेखाओं में कोई दो आपस में समान्तर हों तथा तीसरी रेखा उन्हें प्रतिच्छेदित करती हो।*

3. *तीनों रेखाओं में कोई भी रेखा आपस में समान्तर न हों तथा उनमें से प्रत्येक दो रेखाएँ एक दूसरे को प्रच्छिेदित करती हों।*

4. *तीनों रेखाओं में कोई दो रेखा आपस में समान्तर न हों तथा तीनों रेखाएँ एक दूसरे को एक सर्वनिष्ठ* **P** *बिन्दु पर प्रतिच्छेदित करें। इस स्थिति में तीनों रेखाएं एक बिन्दु* **P** *से होकर जाती हैं। ऐसी रेखाओं को एक बिन्दुगामी रेखाएँ कहते हैं तथा बिन्दु* **P** *को उनका संगमन बिन्दु कहते हैं।*

(*एक बिन्दुगामी रेखाएँ तथा संगमन बिन्दु* P)

इस प्रकार एक ही बिन्दु O *से जाने वाली अनंत रेखाएँ खींची जा सकती हैं।*

(*एक बिन्दुगामी रेखाएँ तथा संगमन बिन्दु* O)

एक ही तल में यदि तीन या अधिक रेखाएँ एक ही बिन्दु से होकर जाएँ तो वे एक

बिन्दुगामी रेखाएँ कहलाती हैं और यह बिन्दु उनका संगमन बिन्दु कहलाता है।

निम्नांकित कथन सत्य है या असत्य, इस पर समूह में चर्चा कीजिए?

(a) रेखा सीमित लम्बाई की होती है।

(b) एक तल में दो रेखाएँ स दैव एक दूसरे का प्रतिच्छेदन करती हैं।

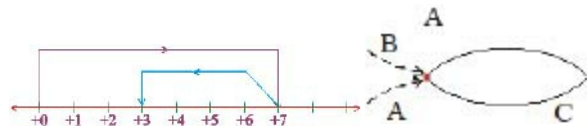
(c) एक बिन्दु से एक ही रेखा खींची जा सकती है।

(d) दो बिन्दुओं से होकर केवल एक रेखा खींची जा सकती है।

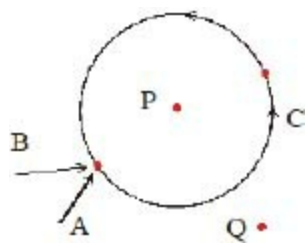
(e) एक ही किरण में दो दिशाएँ होती हैं।

(f) दो रेखाएँ एक दूसरे से कभी नहीं मिलती हैं।

(g) किसी तल में स्थित तीन या तीन से अधिक रेखाएँ एक बिन्दुगामी होंगी यदि वे सभी रेखाएँ उस तल में स्थित एक ही बिन्दु से होकर जाएँ।

7.6 बन्द और खुली आकृतियों का बोध

चित्र - **(i)** चित्र - **(ii)**

यहाँ पर चित्र (i) में ACB कोई वक्र है जिसमें प्रारम्भिक बिन्दु A तथा B उसका अन्त्य बिन्दु है। यदि बिन्दु A और B परस्पर संपाती हो जाय (चित्र ii) तो ACB एक बन्द आकृति होगी। इसके विपरीत यदि बिन्दु A और B संपाती न हो तो आकृति ACB एक खुली आकृति है।

बन्द आकृतियों का अभ्यंतर और उसका बाह्य क्षेत्र

चित्र (iii) में ACB एक बन्द आकृति है जिसमें बिन्दु A और B संपाती है। बिन्दु A से

C *की ओर वक्र के अनुगत बामावर्त* (anti clockwise) *गति करने पर हमारे बायें हाथ की ओर का क्षेत्र अभ्यंतर अथवा अन्त*: (interior) *क्षेत्र तथा दायें हाथ की ओर का क्षेत्र बाह्य क्षेत्र* (exterior) *कहलाता है। चित्र* (iii) *में बिन्दु* P *अभ्यंतर मे तथा बिन्दु* Q *बाह्य क्षेत्र में स्थित हैं। बिन्दु* A, C *और* B *वक्र पर स्थित है। इसी प्रकार*

(1) *चित्र* (iv) *में छायांकित भाग एक बन्द क्षेत्र है तथा वक्र एवं बंद क्षेत्र को छोड़कर क्षेत्र बाह्य क्षेत्र है।*

बाह्य क्षेत्र

(2) *चित्र* (v) *में प्रारम्भिक बिन्दु* A *है जो अपने अन्त्य बिन्दु* B *से संपाती नहीं है। अतएव किरण* AB *एक खुली आकृति का निर्माण करती है।*

A B

(3) *चित्र* (vi) *किसी पक्षी के छाया चित्र को प्रदर्शित करता है। अन्त्य बिन्दु* A *और* E *संपाती* (*एक ही*) *होने के कारण* ACDEB *एक बन्द क्षेत्र है। चित्र* (vi) *में* P *आन्तरिक तथा* K *कोई बाह्य बिन्दु है।*

बाह्य क्षेत्र

(4) *कुछ खुली और बन्द आकृतियाँ चार्ट के माध्यम से पाश्र्व तालिका में दिखाई गयी हैं।*

खुली आकृति : रेखा, कोण, खुली रस्सी

बंद आकृति: त्रिभुज, चतुर्भुज , गाँठ लगी रस्सी

अभ्यास 7(b)

1. अपनी अभ्यास पुस्तिका में एक रेखा खीचिए और अंग्रेजी वर्णमाला के एक छोटे अक्षर का प्रयोग करके उसका नाम लिखिए।
2. पर्यावरण में उपलब्ध वस्तुओं की सहायता से कोई तीन ऐसे उदाहरण दीजिए जिनसे रेखाओं (या उनके भाग) का बोध होता हो।
3. रेखा और किरण में अन्तर चित्र खींचकर स्पष्ट करें।
4. दिए गये प्रारम्भिक बिन्दु (निगमन बिन्दु) A और एक अन्य बिन्दु B से होकर जाती हुई एक किरण खीचिए।

दक्षता अभ्यास 7

1.तीन संरेख बिन्दुओं से होकर जाती हुई कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं?

2. कागज के तल पर निम्नांकित बिन्दुओं को अंकित कर स्पष्ट कीजिए:

(a) एक बिन्दु से कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

(b) दो बिन्दुओं से कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

(c) तीन बिन्दु, जो संरेख नहीं हैं, में से दो-दो बिन्दुओं से कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

(d) चार बिन्दु, जिनमें कोई तीन संरेख नहीं हैं, में से दो-दो बिन्दुओं से कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

(e)पाँच बिन्दु, जिनमें कोई तीन संरेख नहीं हैं, में से दो-दो बिन्दुओं से कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

3.स्तम्भ A **एवं** B **में सही जोड़े का मिलान कीजिए।**

स्तम्भ A   स्मम्भ B

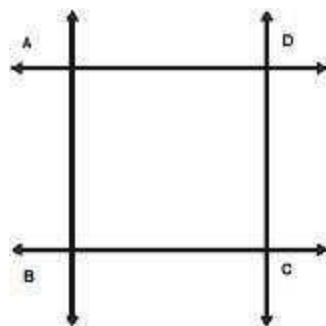
(a) **किरण** $\overleftrightarrow{AB}$

(b) **रेखा** $\overline{AB}$

(c) **रेखाखंड** $\overrightarrow{AB}$

(d) **बंद आकृति** ABA

4. किसी तल पर स्थित एक रेखा में कितने बिन्दु हो सकते हैं?

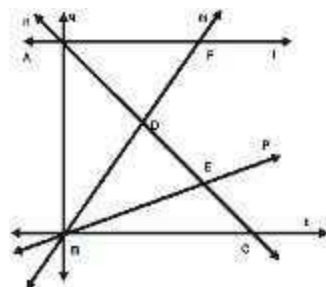
5.

(i) **दी गई आकृति में रेखाओं के नाम लिखिए।**

(ii) **आकृति की उन रेखाओं के नाम लिखिए जो बिन्दु** A**से होकर जाती है।**

(iii) **आकृति में बन्द आकृति का नाम लिखिए**

(iv) **आकृति** KADJ **कैसी आकृति है, खुली या बन्द**

(v) **आकृति** KAL **खुली आकृति है या बन्द**

6.निम्नांकित आकृति में एक बिन्दुगामी रेखाएँ और उनके संगमन बिन्दु लिखिए।

(i)**पाश्र्व आकृति में एक बिन्दुगामी रेखायें और उनके संगमन बिन्दु लिखिए**

(ii)पार्श्व चित्र में AFB में खुली आकृति है या बंद?

(iii) पार्श्व चित्र में FDD'P कैसा क्षेत्र है और यह खुली आकृति है या बन्द ?

प्रोजेक्ट (Project): तीन असंरेखीय बिन्दुओं से होकर जाने वाला एक और केवल एक ही तल होता है। इसका प्रयोग दैनिक जीवन में कहाँ-कहाँहैं ? अपने पर्यावरण एवं विघालय की वस्तुओं, उपकरणों को देखकर बताइए।

इस इकाई में हमने सीखा

1. सभी ठोसों में सतह होती है। सतह को तल कहते हैं।

2. परिवेश में उपलब्ध सभी वस्तुओं में तल होता है।

3.तल दो प्रकार के होते हैं-

(i) सपाट (Flat) (ii) वक्र (Curve)

4.समतल सभी दिशाओं में असीमित रूप से फैला होता है।

5. दो बिन्दुओं से होकर अनंत समतल जाते हैं।

6.तीन असंरेखीय बिन्दुओं से एक और केवल एक ही समतल खींचा जा सकता है।

7. समतल में स्थित दो बिन्दुओं से एक और केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है। यह रेखा उसी तल में होती है जिसमें दो बिन्दु स्थित होते हैं।

8. समतल में दो बिन्दुओं से जाने वाली रेखा का प्रत्येक बिन्दु तल पर स्थित होता है। रेखा का कोई भी बिन्दु तल के बाहर नहीं होता है।

9. एक ही समतल में स्थित दो रेखाएँ या तो परस्पर प्रतिच्छेदन करती हैं अथवा समान्तर होती हैं।

10.रेखा सीधी होती है जिसका दोनों दिशाओं में विस्तार अपरिमित होता है।

11. रेखा मेंअन्त्य बिन्दु नहीं होता है। यदि रेखा पर दो बिन्दु A और Bलिये जाएं तो रेखा को $\overleftrightarrow{AB}$ से प्रदर्शित करते हैं।

12. रेखा को अंग्रेजी वर्णमाला के किसी छोटे अक्षर जैसे l, m, n आदि को लिख कर भी प्रदर्शित किया जाता है।

13. रेखा के किसी एक भाग को रेखाखण्ड कहते हैं जिसमें दोनों ओरअन्त्य बिन्दु

होता है।

14\. *ज्यामिति में रेखा से हमारा आभिप्राय सम्पूर्ण रेखा से होता है नकि उसके एक भाग से।*

15\. *किरण में केवल एक ही दिशा होती है। इसे तीर* (→) *से निरूपित करते हैं।*

16\.*किरण में केवल एक ही अग्र बिन्दु या निगमन बिन्दु होता है।*

17\.*एक तल में स्थित तीन या तीन से अधिक बिन्दु संरेख* (*एक रेखीय बिन्दु*) *कहलाते हैं, यदि वे सभी एक ही रेखा पर स्थित हों। यह रेखा संरेखता की रेखा कहलाती है।*

18\.*एवं ही तल में दो रेखाहें जिस बिन्दु पर प्रतिचछेदित करती हैं, वह बिन्दु प्रतिचछेदित बिन्दु वंहलाता है।*

19\.*एक ही तल में यदि तीन या अधिक रेखाएं एक ही बिन्दु से होकर जाएं तो वे एक बिन्दुगामी रेखाएँ कहलाती हैं और यह बिन्दु उनका संगमन बिन्दु कहलाता है।*

20\. *किसी वक्र द्वारा कभी खुली तो कभी बंद आकृति निर्मित की जा सकती है |*

उत्तरमाला

अभ्यास 7 **(a)**

1.(a) *एक* (b) *असंख्य* (c) *वक्र* (d) *असंख्य*; 2.(a) *सही* (b) *गलत* (c) *गलत* (d) *सही*
3\. 2 *और* 6 → P, 5, 7 → Q *और* 1,3,4 *और* 8 → R, 4. 2 *समतल और एक वक्र*

अभ्यास 7 **(b)**

3\. **रेखा** ⟷ , *किरण* ⟶; 4. (d) A ——— B ——→

दक्षता अभ्यास 7

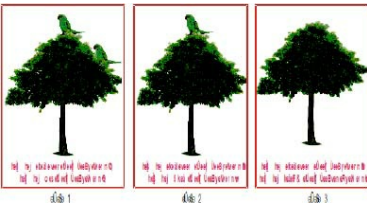
1.*एक*; 2. (a) *असंख्य* (b) *एक* (c) *तीन* (d) 6 (e) 10; 3. (a) *किरण* $\overrightarrow{AB}$, (b) *रेखा* $\overleftrightarrow{AB}$, (c) *रेखाखण्ड* $\overline{AB}$ 4. *असंख्य* 5. (i) $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$, (ii) $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{AB}$; 6. *संगमन बिन्दु* A *और बिन्दुगामी रेखाए* t,q *और*n*संगमन बिन्दु* B *और बिन्दुगामी रेखाएँ* q,m,p *और* t,

इकाई 8 कोण

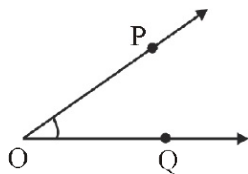
- कोण की अवधारणा
- कोण की माप
- कोण के प्रकार
- पटरी परकार की सहायता से 60° और 120 °कोणों की रचना

8.1 भूमिका :

आपने पिछली कक्षा मे दिशाओं के विषय मे पढ़ा होगा। आप भली प्रकार से जानते हैं कि सूर्य पूर्व में उदय होता है। यदि हम पूर्व की ओर मुख करके खड़े होते हैं तो हाथ की दिशा को उत्तर और दाहिने हाथ की ओर पड़ने वाली दिशा को दक्षिण कहते हैं।हाथ की दिशा को उत्तर और दाहिने हाथ की ओर पड़ने वाली दिशा को दक्षिण कहते हैं। कुल चार दिशाएँ पूर्व (East), पश्चिम (West), उत्तर (North) और दक्षिण (South) होती हैं। आप अवश्य जानते हैं कि पूर्व-पश्चिम और उत्तर-दक्षिण एक दूसरे के विपरीत दिशा में होते हैं। आइए हम इस ज्ञान का प्रयोग कोण तथा इसके कुछ गुणों को सीखने में करें।

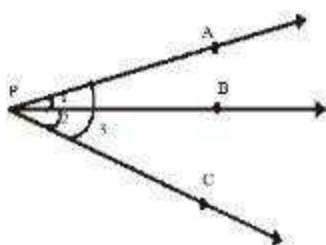
कोण की अवधारणा

चित्र (1) में, आप देख सकते हैं कि खुली हुई पुस्तक के किनारे AB और AC एक दूसरे पर झूके हुए हैं। जो कोण का आभास कराते हैं। इसी प्रकार, चित्र (2) में, दरवाजे का किनारा (Edge) PQ तथा चौखट PR के बीच का झुकाव भी एक कोण का आभास देता है।

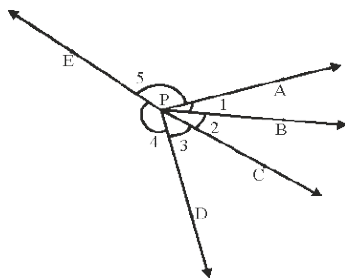
इन्हें कीजिए

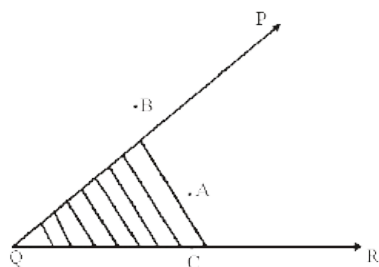
मचिस की दो तीलियों को लें और पहली तीली के एक सिरे को दूसरी तीली के एक सिरे से चित्र की भाँति जोड़ें।

दो तीलियों OP ***और*** OQ ***को दो किरणों*** $\overrightarrow{OP}$ ***और*** $\overrightarrow{OQ}$ ***के रूप में कल्पना की जा सकती है। इन दोनों किरणों में*** O ***एक उभयनिष्ठअन्त्य बिन्दु*** (***या प्रारम्भिक बिन्दु***) ***है। ये दोनों किरणें एक कोण बना रही हैं।***

उभयनिष्ठ प्रारम्भिक बिन्दु वाली दो किरणों से एक कोण बनता है। कोण को बनाने वाली दोनों किरणें उसकी भुजाएँ (Sides) ***कहलाती हैं।***

उपर्युक्त आकृति में किरण $\overrightarrow{OP}$ ***और*** $\overrightarrow{OQ}$ ***से बने एक कोण को दर्शाया गया है।*** O ***इस कोण का शीर्ष है। कोण को दर्शाने के लिए शीर्ष*** 0 ***पर एक वक्र का प्रयोग करते हैं। इसे से व्यक्त करते हैं।***

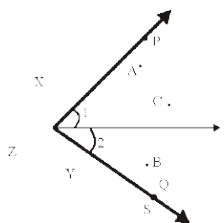
तर्क कीजिए एवं चर्चा कीजिए

संलग्न चित्र को देखिए, क्या हम बिन्दु P ***पर बने सभी कोणों को*** $\angle P$ ***कह सकते हैं***? ***हम यहाँ देखते हैं कि*** $\angle P$ ***को*** $\angle 1=\angle APB$, $< 2 = \angle CPB$ ***एवं*** $\angle 3=\angle APC$ ***के लिए प्रयोग कर सकते हैं। पर प्रत्येक कोण परस्पर भिन्न हैं। इसलिए एक बिन्दु पर जब कई कोण बनते हैं तो कोण को लिखते समय उनके शीर्ष के अक्षर को सदैव बीच में लिखते हैं।***

प्रयास कीजिए

चित्र में संख्याएं* 1, 2, 3, 4, *और* 5 *के नाम लिखिए

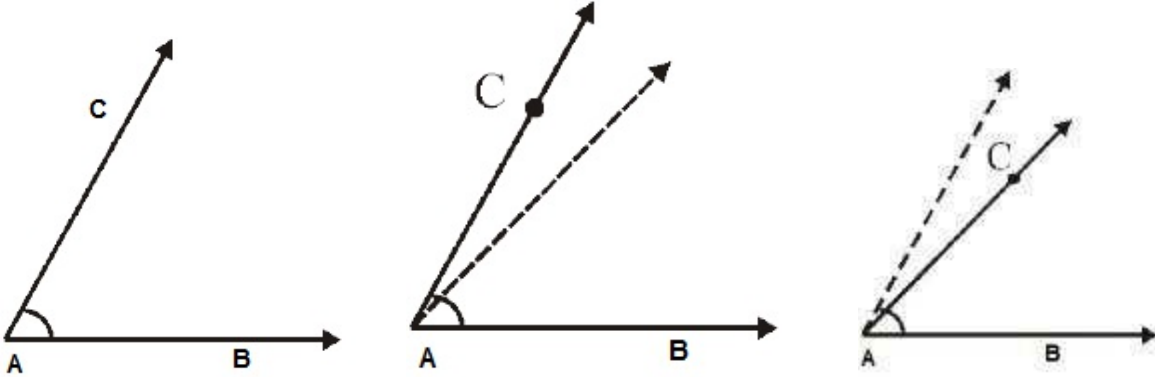
8.2 *कोण के अभ्यन्तर और बहिर्भाग*

पार्श्व कोण* PQR *को देखिए। यह कोण तल को दो भागों में विभाजित करता हं*o। *एक भाग में कोण के सभी आन्तरिक बिन्दु जैसे* A *स्थित है। तल के इस भाग को कोण का अभ्यन्तर भाग कहते हैं।

तल का वह भाग जिसमें कोण के बाहर के बिन्दु जैसे* B *स्थित हैं, कोण का बाह्य बहिर्भाग कहलाता है। बिन्दु* C *कोण* PQR *के भुजा पर स्थित है। अत: कोण से संबन्धित तीन क्षेत्र होते है।

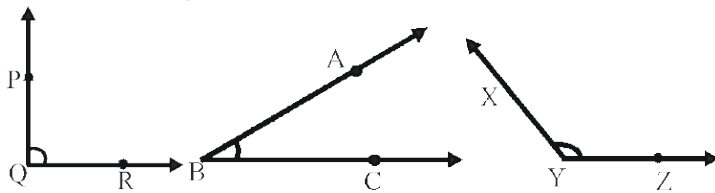
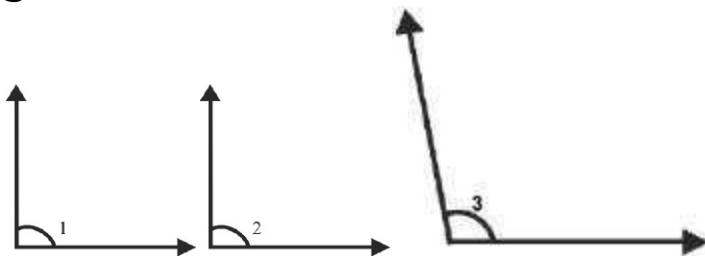
प्रयास कीजिए

पाश्र्वाकित चित्र में क्रमश:* $\angle 1$ *और* $\angle 2$ *के अभ्यन्तर और बहिर्भाग के बिन्दुओं को लिखिए

8.3 *कोण की माप (अंश में)*

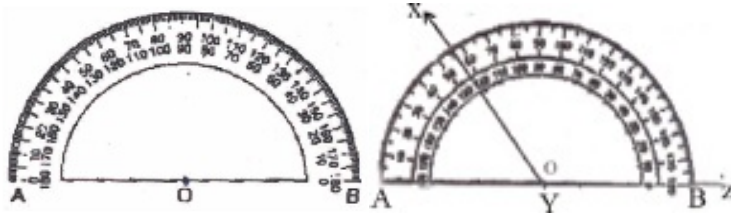
कल्पना कीजिए कि* $\overrightarrow{AB}$ *एक ऐसी किरण है जिसका प्रारम्भिक बिन्दु* A *है और यह किरण बिन्दु* A *के परित: घूम सकती है। यदि इसे घुमाकर* $\overrightarrow{AC}$ *स्थिति में लाएँ तो हम

देखते हैं कि दोनों स्थितियों के बीच एक कोण बनता है जिसका शीर्ष A और भुजाएँ $\vec{AB}$ और $\vec{AC}$ हैं। यदि हम पुन: $\vec{AC}$ को घुमा कर घटायें या बढ़ायें तो चित्र की निम्नांकित स्थितियाँ बनती हैं।

इस प्रकार हम देखते हैं कि दोनों भुजाओं के बीच के झुकाव को आवश्यकतानुसार कम या अधिक किया जा सकता है। इन कोणों के झुकाव की माप को कोणों की माप कहते हैं।

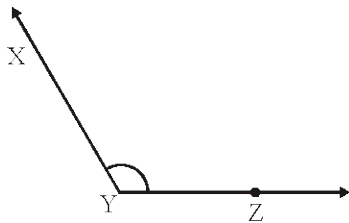
कोणों की तुलना

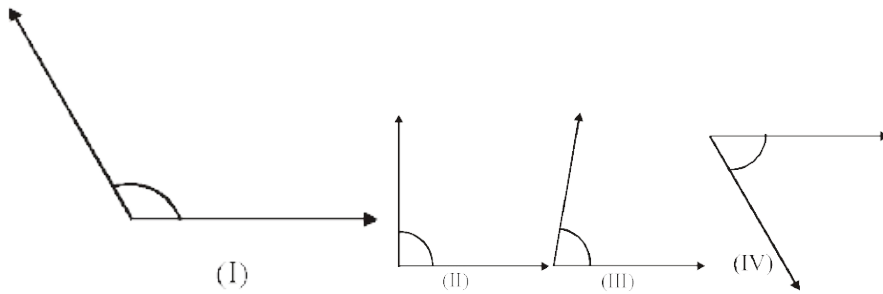
यदि हम दो या अधिक कोणों की परस्पर तुलना करते हैं तो देखते हैं कि जब उनके मापों में अधिक अन्तर होता है, तो उनमें स्पष्ट रूप से छोटे और बड़े कोणों की पहचान कर लेते हैं। उदाहरणार्थ निम्नांकित चित्रों में यह स्पष्टत: दिखाई देता है कि ∠ABC *अन्य दोनों कोणों* ∠PQR *और* ∠XYZ *से छोटा है और* ∠PQR ; ∠ABC *से बड़ा किन्तु* ∠XYZ *से छोटा है।*

पुन: निम्नांकित चित्रों को देखें।

चित्र में ∠1 ∠2 *और* ∠3 *को देखें। क्या इन्हें देखकर बताया जा सकता है कि कौन*

कोण बड़ा है और कौन कोण छोटा है ? यहाँहम देखते हैं कि इन तीनों कोणों के झुकाव का अन्तर बहुत कम है जिसे देखकर नहीं बताया जा सकता है कि कौन कोण छोटा और कौन कोण बड़ा है। इसलिए कोणों का तुलनात्मक अध्ययन अधिक परिशुद्धता से करने के लिए उनको नापना आवश्यक हो जाता है। कोण को नापने के लिए जिस उपकरण का प्रयोग करते हैं उसे चाँदा कहते हैं।

चाँदा

यह एक अर्द्धवृत्ताकार उपकरण है जिससे किसी कोण को मापते हैं। इनके वक्रीय किनारे (edge) को 180 बराबर भागों में विभाजित किया गया है। प्रत्येक भाग एक अंश (degree) कहताला है। इस पर दोनों दिशाओं में (वामावर्ती तथा दक्षिणावर्ती) 0°से 180° तक चिह्न लगे होते हैं। जैसा - चित्र से स्पष्ट है, AB आधार और O इसका मध्य बिन्दु है।

कोण का मापना

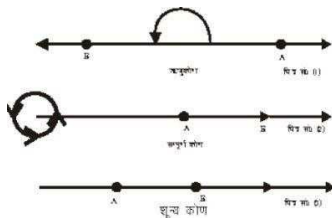
आइए, कोण को मापने के तरीके संलग्न कोण द्वारा समझें चाँदे के आधार AB के मध्य बिन्दु O को कोण के शीर्ष बिन्दु Y पर रखकर इस प्रकार समायोजित करें कि किरण YZ पर OB पड़े। चाँदे पर पड़े उस स्केल को पढ़िए जिससे किरण YZ चिह्न 0°से मिल रही है। वक्रीय किनारे पर किरण YX द्वारा दर्शित चिह्न कोण का अंशीय मान होगा। इसे ∠XYZ = 125 °लिखते हैं।

प्रयास कीजिए

निम्नांकित कोणों को चाँदे से मापिए ओर उनके नाप लिखिए -

8.4 कोण के माप की इकाई का इतिहास

बेबीलोनिया के लोग सूर्य और चन्द्रमा की गति के विषय में उतनी जानकारी नही रखते थे जितनी आज हम लोगों को है। वे इस बात का अनुभव करते रहे कि सूर्य आकाश में एक निश्चित स्थिति में सदैव 360 *दिनों बाद आ जाता है। इस पूरे एक चक्कर को उन लोगों ने* 360 *बराबर भागों में विभक्त किया और प्रत्येक भाग को वर्ष के एक दिन के रूप में लिखा गया। इसी एक भाग को एक अंश* (1°) *से तथा पूरे एक चक्कर को* 360° *से व्यक्त करते हैं।*

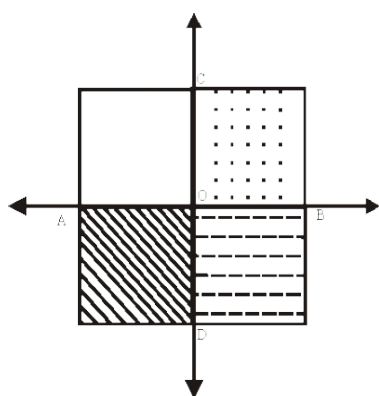
आधा चक्कर 180° *होता है। इसे ऋजु कोण भी कहते हैं क्योंकि इस कोण की दोनो भुजाएँ एक रेखा में होती है।*

आइए हम कुछ विशिष्ट प्रकार के कोणों को समझें

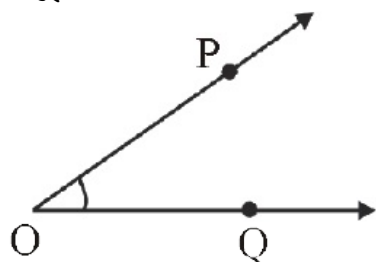
8.4.1 कोणों के माप का मात्रक (अंश में)

किसी रेखा के किसी बिन्दु O *पर दो किरण परस्पर विपरीत दिशा में लीजिए। इस प्रकार रेखा के बिन्दु* O *पर दो विपरीत किरणों के द्वारा बनाये गये कोण को ऋजु कोण* (Straight angle) *कहते हैं, चित्र* (1) ।

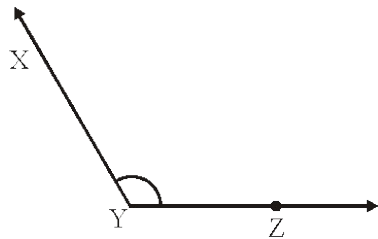
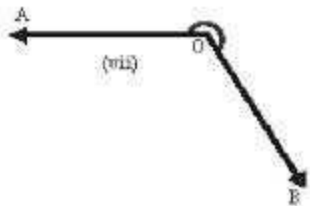
यदि कोई किरण अपने प्रारम्भिक बिन्दु के प्रति एक बार पूरा घुमाने के बाद अपनी प्रारम्भिक स्थिति में सम्पाती हो जाय तो इस प्रकार बने कोण को सम्पूर्ण कोण (Complete angle) *कहते हैं, चित्र* (2) ।

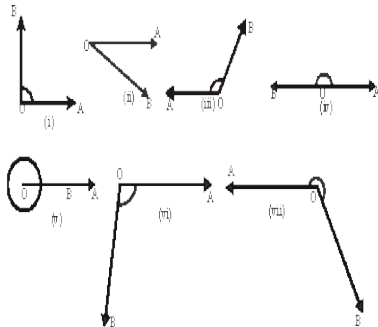
यदि किरण को घुमाए बिना इनकी प्रारम्भिक और आन्तिम स्थितियाँ सम्पाती हों, तो इस प्रकार बने कोण को शून्य कोण (Zero angle) *कहते हैं, चित्र* (3) ।

- *आयताकार या वर्गाकार कागज पर चित्रानुसार एक रेखा* $\overleftrightarrow{AB}$ *लीजिए। इसे* AB *के अनुगत मोड़ दीजिए। पुनः इस कागज को इस प्रकार मोड़िए कि रेखा* AB *का एक भाग दूसरे भाग पर आ जाय। कागज के दूसरे मोड़ को* CD *से दर्शाइए। हम देखते हैं कि कागज के मोड़ों का उभयनिष्ठ बिन्दु* O *है। अब बिन्दु* O *पर चार कोण* <BOC ,,COA,<AOD *तथा* <DOB *बनते हैं।*
  अक्सी (*पारदर्शक*) *कागज से इन चारों कोणों को नापिए। हम देखेंगे कि ये चारों कोण परस्पर बराबर हैं। इनमें से प्रत्येक कोण कोहम समकोण* (Right angle) *कहते हैं।*

8.5 ***कोणों के प्रकार***

हम समकोण, ऋजु कोण, सम्पूर्ण कोण तथा शून्य कोण के विषय में अध्ययन कर चुके हैं। अब हम कुछ अन्य प्रकार के कोणों के बारे में अध्ययन करेंगे।

न्यून कोणः पार्श्व चित्र (1) *देखिए। यह कोण जो शून्य कोण से बड़ा किन्तु एक समकोण से छोटा होता है, न्यूनकोण* (Acute angle) *कहलाता है। अर्थात* 90°> *न्यूनकोण* >0 °

अधिक कोणः पार्श्व चित्र (2) *देखिए। वह कोण जो एक समकोण से बड़ा किन्तु एक*

ऋजु कोण से छोटा होता है, अधिक कोण (Obtuse angle) कहलाता है। अर्थात 180° > अधिक कोण > 90 °

वृहत् कोण: पार्श्व चित्र (3) देखिए। वह कोण जो एक ऋजु कोण से बड़ा किन्तु सम्पूर्ण कोण से छोटा होता है, वृहत् कोण (Reflex angle) कहलाता है। अर्थात् 360° > वृहत कोण > 180 °

प्रयास कीजिए

निम्नांकित आकृतियों को देखिए और कोण के प्रकार को लिखिए।

- 280° का कोण किस प्रकार का कोण है?
- एक न्यूनकोण बनाइए। नापकर इसकी नाप लिखिए।
- एक अधिक कोण बनाइए। इसे नापिए और बताइए कि यह कोण, ऋजुकोण से कितना छोटा है?
- निम्नांकित कोणों में न्यूनकोण, अधिककोण और वृहत्कोण छाँटकर अपनी अभ्यास पुस्तिका में लिखिए।

  210°, 147°, 10°, 300°, 54°, 178°, 91°

इसे भी कीजिए

क्रियाकलाप

1. ***अपनी भुजा के ऊपरी और निचले भाग का प्रयोग करते हुए कोहनी*** (elbow) ***पर न्यूनकोण, समकोण और अधिककोण बनाइए।***

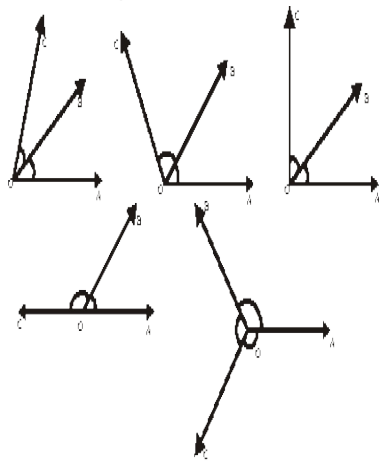
2. ***दो आसन्न अंगुलियों के कोण बनाइए। कितने प्रकार के कोण बनाये जा सकते हैं?***

3. ***यदि हम प्रातः काल सूर्य की ओर मुख करके खड़े हों तो किस दिशा में मुख हो जाएगा, यदि दाहिनी ओर*** (i) ***एक समकोण पर घूम जायें*** (ii) ***दो समकोण पर घूम जायें*** (iii) ***तीन समकोण पर घूम जायें*** (iv) ***चार समकोण पर घूम जायें।***

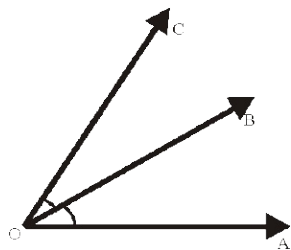
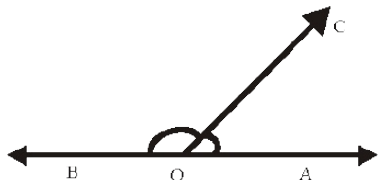
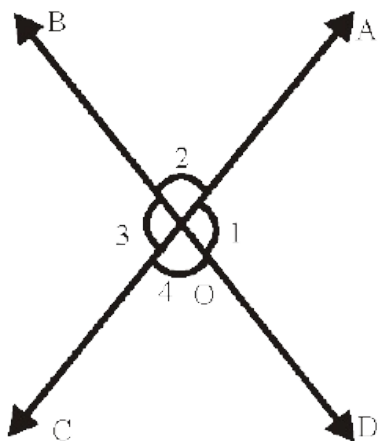
4. ***एक घड़ी लीजिए जिसमें घंटा और मिनट की सूइयाँ हों। घड़ी में तीन, छह, नौ और बारह बजाइए। प्रत्येक दशा में देखिए इनके बीच कितने अंश का कोण बनता है?***

5. ***केवल पटरी और पेंसिल लीजिए तथा इसकी सहायता से न्यूनकोण, समकोण, अधिककोण, ऋजुकोण, वृहत् कोण और सम्पूर्ण कोण खींचिए।***

कोण-युग्म

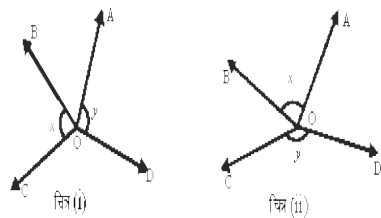
इन आकृतियों को देखिए :

हम देखते हैं कि प्रत्येक कोण में कोणों का एक उभयनिष्ठ शीर्ष है। उभयनिष्ठ शीर्ष पर भिन्न - भिन्न प्रकार के कोणों के जोड़े बन रहे हैं। इन कोणों के जोड़े को युग्म कहते हैं। इन भिन्न-भिन्न स्थितियों से बने कोण- युग्मों के विषय में अब हम अध्ययन करेंगे।

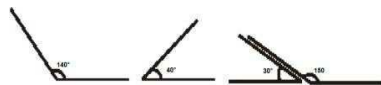
आसन्न कोण: पार्श्व चित्र को देखिए। इसमें दो कोण AOB ***और कोण*** BOC ***हैं जिनका एक ही उभयनिष्ठ शीर्ष*** O ***तथा भुजा*** OB ***उभयनिष्ठ है। अतः ऐसे कोण-युग्म को, जिनका एक उभयनिष्ठ शीर्ष हो और उनकी उभयनिष्ठ भुजा के विपरीत ओर भुजायें***

OA ***और*** OC ***स्थित हों, आसन्न कोण या संलग्न कोण*** (Adjacent angles)***कहते हैं।***

रैखिक युग्म : पार्श्व चित्र को देखिए। यहाँपर कोण AOC ***और कोण*** COB ***आसन्न कोण हैं।*** O ***उभयनिष्ठ शीर्ष तथा*** OC ***उभयनिष्ठ भुजा है। भुजाएँ*** OA ***तथा*** OB ***विपरीत किरणें है। आसन्न कोण के ऐसे युग्म को रैखिक युग्म*** (Linear Pair) ***कहते हैं। ऐसे रैखिक युग्म कोणों का योग दो समकोण होता है।***

शीर्षाभिमुख कोण: पार्श्व चित्र में दो रेखाएँ AC ***और*** BD ***एक दूसरे को बिन्दु*** O ***पर प्रतिच्छेदित करती हैं। जिससे बिन्दु*** O ***पर चार कोण बनते हैं।***

चित्र को देखकर बताइए कि कौन-कौन रैखिक-युग्म हैं? ***हम देखते हैं कि कोण युग्म*** $\angle 1$ ***और*** $\angle 2$; ***तथा***$\angle 2$ ***और*** $\angle 3$; $\angle 3$ ***और*** $\angle 4$; ***तथा***$\angle 4$ ***और*** $\angle 1$ ***रैखिक-युग्म हैं। चित्र में पुन: देखकर बताइए कि कौन-कौन से कोण, रैखिक-युग्म नहीं हैं। हम देखते हैं कि कोणयुग्म*** $\angle 1$***और*** $\angle 3$ ***तथा*** $\angle 2$ ***और*** $\angle 4$ ***रैखिक- युग्म नहीं हैं। अत: जब दो रेखाएँ एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करती हों तब इनमें बने इन दो कोणों को, जिनमें कोई भुजा उभयनिष्ठ न हो, शीर्षाभिमुख कोण*** (Vertically opposite angles) ***कहते हैं। इस प्रकार*** $\angle 1$***और*** $\angle 3$ ***तथा*** $\angle 2$ ***और*** $\angle 4$ ***शीर्षाभिमुख कोण हैं।***

निम्नांकित चित्रों को देखकर अपनी अभ्यास पुस्तिका पर ऐसे ही कोण खींचिए।

(1) बताइए चित्र (i) में क्या कोण x तथा कोण y शीर्षाभिमुख हैं?

(2) बताइए चित्र (ii)में क्या कोण x तथा कोण y शीर्षाभिमुख हैं?

कोटिपूरक कोण: निम्नांकित आकृतियों को देखिए। यदि दो कोणों का योगफल 90° हो तो ऐसे कोणों को एक दूसरे का कोटिपूरक कोण अथवा पूरक कोण (Complementary Angles)कहते हैं। जैसे 40°, 50° एवâ 30°, 60° आदि।

सम्पूरक कोण: निम्नांकित आकृतियों को देखिए। यदि दो कोणों का योगफल 180°हो, तो ऐसे कोणों को एक दूसरे का संपूरक कोण (Supplementary Angles) कहते हैं। जैसे 40°, 140° Ìã 30°, 150°आदि। अत: यह स्पष्ट है किकोटिपूरक और संपूरक कोणों के शीर्ष का उभयनिष्ठ तथा आसन्न कोण होना आवश्यक नहीं है।

प्रयास कीजिए

1. निम्नांकित कोणों में से प्रत्येक कोण का कोटिपूरक कोण लिखिए।

(i) 20° (ii) 55° (iii) 68°

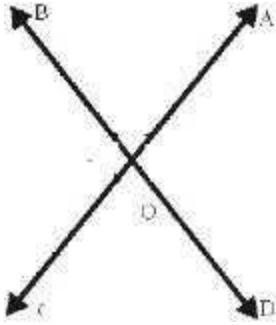
2. निम्नांकित कोणों में से प्रत्येक कोण का संपूरक कोण लिखिए।

(i) 45° (ii) 70° (iii) 120°

3. निम्नांकित कोण- युग्मों में कौन पूरक और कौन संपूरक हैं?

(i) 48°, 42° (ii) 135°, 45°

(iii) 160°, 20°

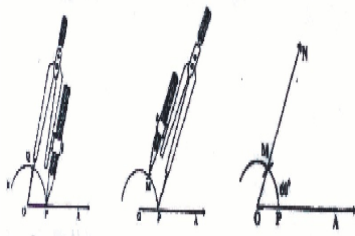
4. पार्श्व चित्र में रैखिक- युग्म और शीर्षाभिमुख कोण के नाम बताइए।

8.5 विभिन्न माप के कोणों की रचना

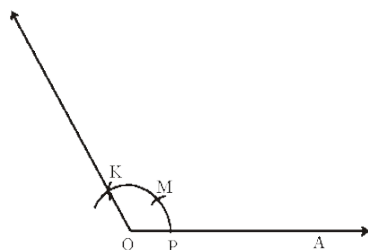
8.5.1. 60° के कोण की रचना:

(i) ***अपनी अभ्यास पुस्तिका पर एक किरण*** OA ***खींचिए। अब परकार के नुकीले सिरे को किरण के प्रारम्भिक*** O ***बिन्दु पर रखकर किसी दूरी से एक वृत्ताकार आकृति*** PQR ***बनाइए। यह वृत्ताकार आकृति किरण*** OA ***को*** P ***पर काटती है। स्थिति*** (i)।

(ii) ***दूरी*** OP ***को लेकर परकार के नुकीले सिरे को बिन्दु*** P ***पर रखिए और वृत्ताकार आकृति*** (***चाप***)PQR ***में इतनी ही दूरी से पेंसिल वाले सिरे से बिन्दु चिह्नित कीजिए। यह बिन्दु*** M ***है। स्थिति*** (ii)

(iii) ***अब*** OM ***को मिला दीजिए।*** OM ***को उसी सीध में आगे ब ढ़ाया। इसी किरण पर एक बिन्दु*** N ***ले। इस प्रकार बने कोण*** AON ***को चाँदा से मापकर देखिए। यह कोण*** 60° ***का होगा। स्थिति*** (iii)

किसी किरण OA***के प्रारम्भिक बिन्दु*** O ***पर परकार के नुकीले सिरे को रखकर किसी दूरी से एक वृत्ताकार आकृति खींचिए जो किरण से*** P ***पर मिलती है। पुनः*** P ***से उतनी ही दूरी वृत्ताकार आकृति पर चिह्नित की जाए। तब इस चिह्नित बिन्दु और प्रारम्भिक बिन्दु को मिलाने से किरण*** OA ***के साथ बना हुआ कोण*** 60° ***का होगा।***

8.5.2 120° कोण की रचना :

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर एक किरण OA *खींचिए। परकार के नुकीले भाग को प्रारम्भिक बिन्दु* O *पर रखकर एक वृत्ताकार आकृति (चाप) खींचिए जो किरण को* P *पर मिलती है।* P *से उसी दूरी से बराबर वृत्ताकार आकृति पर बिन्दु* M *चिह्नित कीजिए। अब परकार का नुकीला सिरा बिन्दु* M *पर रखकर उसी दूरी* (OM=PM) *के बराबर एक और बिन्दु* K *चिह्नित कीजिए। प्रारम्भिक बिन्दु* O *को* K *से मिलाइए। कोण* AOK *को चाँदा से मापिए। यह कोण* 120° *का होगा। इसी प्रकार* 60° *के अपवर्त्य* 180°, 240° *आदि कोणों की रचना की जा सकती है।*

निम्नलिखित बिन्दुओं पर सामूहिक चर्चा कीजिए और निष्कर्ष निकलिए :

(i) *क्या दो अधिक कोण संपूरक कोण हो सकते हैं* ?

(ii) *क्या दो समकोण संपूरक कोण हो सकते हैं* ?

(iii) *क्या दो न्यून कोण संपूरक कोण हो सकते हैं* ?

(iv) *क्या दो न्यून कोण रैखिक युग्म बना सकते हैं* ?

(v) *क्या रैखिक युग्म के दोनों कोण अधिक कोण हो सकते हैं* ?

दक्षता अभ्यास 8

1. *यदि साइकिल के पहिए में* 36 *तीलियाँ हों, तो दो आसन्न तीलियों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।*

2. *कोण* 60°, 120°, 240°, 300° *सम्पूर्ण कोण के कौन से भाग हैं*?

3. *ज्ञात कीजिए:*

(i) *एक समकोण का* $\frac{1}{9}$ *वाँ भाग* (ii) *एक समकोण का* 30%

(iii) *एक ऋजु कोण का* 50% (iv) *एक सम्पूर्ण कोण का* 60%

4. *व्यायाम करते समय जब छात्र को निदóशित किया जाता है* :

(i) *पीछे मुड़, वह कितने अंश से घूम जाता है* ?

(ii) दायें घूम, तो वह कितने अंश से घूम जाता है ?

5. निम्नांकित कोणों को उनके परिमाण के आधार पर वर्गीकृत कीजिए:

0°, 30°, 90°, 135°, 180°, 225°, 360°

6. निम्नांकित का उत्तर लिखिए:

(i) न्यूनकोण का कोटिपूरक कोण ....कोण होता है।

(ii) न्यून कोण का संपूरक कोण..............कोण होता है।

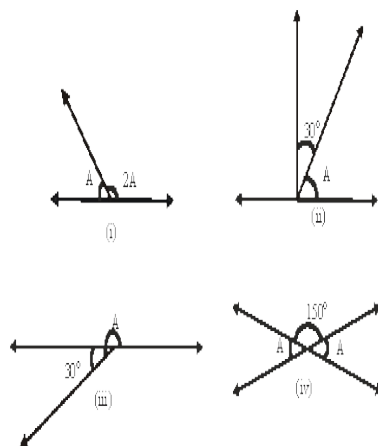
(iii) एक समकोण का संपूरक कोण ....कोण होता है।

(iv) अधिक कोण का संपूरक कोण............कोण होता है।

7. निम्नांकित कोण समकोण तथा ऋजुकोण का कौन सा अंश है ?

(i) 30° (ii) 60°

(iii) 120° (iv) 150°

8.निम्नांकित चित्रों में कोण A की गणना कीजिए।

9. एक सम्पूर्ण कोण को 60° के कितने अपवत्या6 में विभक्त कर सकते हैं। इसका सत्यापन पटरी, परकार से कीजिये।

10. पटरी और परकार की सहायता से 300° का कोण खींचिए।

इस इकाई में हमने सीखा

1. कोण किसे कहते हैं ? कोण कितने प्रकार के होते हैं ?

2. पूरक कोण और सम्पूरक कोण, आसन्न कोण, शीर्षाभिमुख कोण, रैखिक युग्म इत्यादि के तात्पर्य एवं पारस्परिक सम्बन्ध।

3.पटरी और परकार से विभिन्न मापों के कोणों की रचना करना।

उत्तरमाला

दक्षता अभ्यास 8

1.10° 2. 1/6, 1/3, 2/3, 5/6, 3. (i)10°, (ii) 27°,(iii) 90°, (iv) 216°, 4. (i) 180°, (ii) 90°, 5. ***शून्य कोण, न्यून कोण, समकोण, अधिक कोण, ऋजु कोण, बृहद कोण, सम्पूर्ण कोण***; 6. (i) ***न्यून कोण*** (ii) ***अधिक कोण*** (iii) ***एक समकोण*** (iv) ***न्यूनकोण***; 7. (i)1/3,1/6, (ii)2/3, 1/3, (iii)4/3, 2/3, (iv)5/3, 5/6, 8. (i) 60°, (ii) 60° , (iii) 210° , (iv) 30° , 9 ***छह***

इकाई : 9 लम्ब और समांतर रेखाएँ

- लम्ब और समान्तर रेखाओं की अवधारणा
- दो सरल रेखाओं और एक तिर्यक रेखा द्वारा बने कोणों के नाम एवं गुण
- पटरी तथा गुनिया की सहायता से समांतर रेखाएं खींचना
- समांतर रेखाओं की विशेषताओं की सहायता से अज्ञात कोण की माप बताना तथा रेखाएं खींच कर उनका सत्यापन

9.1 भूमिका:

आपने तल, बिन्दु, रेखाएँ और कोणों के विषय में पढ़ लिया है। अब हम रेखाओं के पारस्परिक सम्बन्धों के विषय में अध्ययन करेंगे।

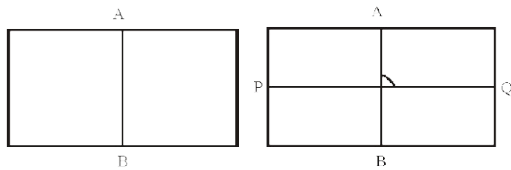
आपने मकान बनाते समय राजगीर को दीवार की चिनाई करते समय साहुल और सूत का प्रयोग करते हुए देखा होगा। क्या आप बता सकते हैं कि साहुल और सूत के द्वारा वह क्या देखता है। यह आपको ज्ञात होना चहिए कि साहुल से वह दीवार की भूतल के लम्बवत् होने की स्थिति को निर्धारित करता है जबकि सूत के माध्यम से दीवार के ईंट की हर परत के समांतर होने की स्थिति का पता लगाता है। आइए अब हम लम्ब रेखाएं और समांतर रेखाओं के विषय में जानें।

9.2 लम्ब रेखाएँ

आपकी पुस्तक के प्रत्येक पन्ने के कोने दर्शाते हैं कि दो रेखाएं परस्पर समकोण पर हैं, जैसा कि चित्र (i) में देख रहे हैं।

चित्र (i)

इन्हें कीजिए

एक कागज का पन्ना लीजिए, इसे बीच से मोड़िए और मोड़ का निशान (Crease) AB बनाइए। फिर इसे पुन: अन्य दिशा में इस प्रकार मोड़िए कि AB का एक भाग इसके दूसरे भाग को ठीक -ठीक ढक ले और मोड़ का निशान P Q बनाइए और कागज को खोल लीजिए। देखेंगे कि दोनों मोड़ के निशान एक दूसरे पर लम्ब हैं अर्थात् AB और PQ परस्पर लम्ब हैं।

यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करें और उनके बीच का कोण समकोण हो, तो वे रेखाएं एक दूसरे पर लम्ब (Perpendicular) रेखाएं कहलाती हैं। इसे $AB \perp PQ$ लिखते हैं।

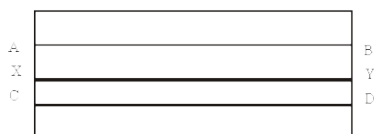
प्रयास कीजिए

कागज पर खींची हुई रेखा के किसी बिन्दु से रेखा पर लम्ब खींचिए।

9.3 समांतर रेखाएं

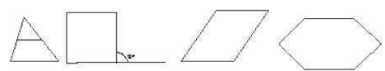
एक कागज का पन्ना लीजिए, इसे बीच से मोड़िए और मोड़ का निशान xy बनाइए। फिर इसे पुन: उसी दिशा में मोड़िए मोड़ का निशान AB और CD बनाइए। कागज पर देखेंगे कि चित्र के अनुसार रेखाएँ प्राप्त होंगी।

यहाँ हम देखते हैं कि किन्हीं भी दो रेखाओं के किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच की दूरी सदैव समान है। चाहे उन्हें जितना भी ब ढ़ायें वे परस्पर प्रतिच्छेद नहीं करती हैं।

एक ही तल में स्थित दो रेखाएँ जो स दैव समान दूरी पर रहती हैं और परस्पर प्रतिच्छेद नहीं करती हैं, समांतर रेखाएँ कहलाती हैं। इन्हें $\vec{OP} \parallel \vec{OQ}$ ãलिखते हैं।

प्रयास कीजिए

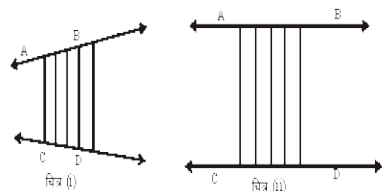
एक कागज को मोड़कर उस पर बनी एक रेखा के समांतर मोड़ के निशान बनाइए।

इन्हें कीजिए :

उपर्युक्त चित्रों में समांतर एवं लम्ब रेखाखंडों के युग्म लिखिए।

9.4 *दो समांतर रेखाओं के बीच की दूरी ज्ञात करना*

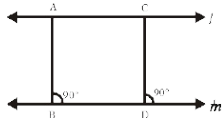
इन्हें करिये, सोचिए और निष्कर्ष निकलिए :

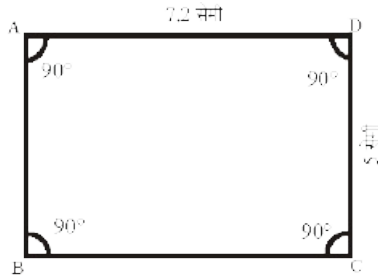
क्रिया- कलाप

अग्रांकित चित्र (i) ***और*** (ii) ***को देखिए। चित्र*** (i) ***में रेखा*** AB ***और रेखा*** CD ***समांतर नहीं है। क्या रेखा*** AB ***के विभिन्न बिन्दुओं से रेखा*** CD ***के विभिन्न बिन्दुओं तक*** BD ***के समांतर खींची गयी रेखाओं की लम्बाई समान है*** ? ***चित्र*** (ii) ***में रेखा***AB ***और*** CD ***समांतर है। क्या रेखा*** AB ***के विभिन्न बिन्दुओं से रेखा*** CD ***पर डाले गये लंब की लम्बाई समान है*** ?

हम पाते है कि चित्र (i) ***में*** BD ***के समांतर विभिन्न रेखाओं की लम्बाई समान नहीं है, जबकि चित्र*** (ii) ***में डाले गये विभिन्न लंबों की लंबाई समान है। समांतर रेखाओं के लिए इस लंब की लंबाई को लम्बवत् दूरी या दूरी कहते हैं।***

अभ्यास 9 (a)

1. ***अपने आस पास की वस्तुओं के समांतर रेखाओं के युग्मों के चार उदाहरण दीजिए।***

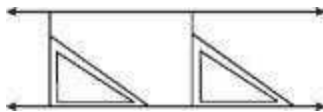
2. ***चित्र*** ℓ ***में*** m ***दो समांतर रेखाएँ हैं।*** AB ***और*** CD ***इनके बीच की लम्बवत् दूरी है, यदि*** AB = 3 ***सेमी***, CD ***की लम्बाई बताइए।***

3. *चित्र में आयत* ABCD *के नाम लिखे गये हैं।*

(i)*क्या* AB || CD Öõ ? *यदि हाँ तो क्यों* ?

(ii)*क्या* AD || BC Öõ ? *यदि हाँ तो क्यों* ?

समांतर रेखाओं के बीच की दूरी ज्ञात करना

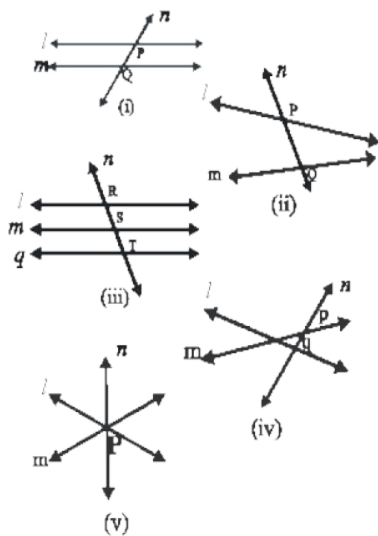
इन्हें करिये, सोचिए और निष्कर्ष निकलिए :

पटरी की सहायता से इसके दोनों किनारों के अनुदिश दो समांतर रेखाएं ℓ *और* m *खींचिए।*

रेखा ℓ *पर दो बिन्दु* M *तथा* N*लीजिए।*

इन बिन्दुओं से चित्र के अनुसार सेट-स्क्वायरकी सहायता से MP *और* NC *लम्ब खींचिए। इन लम्बों को नापिए। लंब की अनुदिश दूरी* MP *और* NC *में क्या सम्बन्ध है* ? *नापने पर* MP *और* NC *के मान बराबर हैं। इस प्रकार हम निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि किन्हीं दो समांतर रेखाओं के बीच की दूरी हर स्थान पर समान होती है। इस दूरी को इन रेखाओं के बीच की लम्बवत् दूरी कहते हैं।*

9.5 *तिर्यक रेखा* (Transversal Line) :

इन्हें कीजिए

पाश्र्काकित चित्रों को देखिए और बताइए :

चित्र (i) में रेखा n रेखा ℓ और m को किन-किन बिन्दुओं पर काटती है ?

चित्र (ii) में रेखा n, रेखा ℓ और m को किन-किन बिन्दुओं पर काटती है ?

चित्र (iii) में रेखा n, रेखा ℓ, mऔर q को किन-किन बिन्दुओं पर काटती है ?

चित्र (iv) में रेखा n रेखा ℓ और m किन-किन बिन्दु पर काटती है ?

चित्र (i), (ii), (iii) में रेखा nतथा रेखा ℓ और m के कटान बिन्दु भिन्न -भिन्न हैं अथवा एक ही बिन्दु हैं ?

चित्र (v) में रेखाओं के कटान बिन्दुओं की संख्या कितनी है?

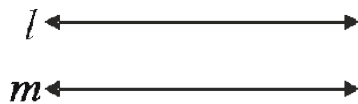
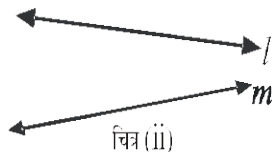
जब रेखा n, रेखा ℓ और m को भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर काटती है तो इसे तिर्यक रेखा कहते हैं। चित्र (v) में यह रेखा ℓ और m को एक बिन्दु पर काटती है। अत: तिर्यक रेखा नहीं है।

तिर्यक रेखा, वह रेखा है जो दो या दो से अधिक रेखाओं को भिन्न - भिन्न बिन्दुओं पर काटती है।

9.6. दो रेखाओं के अन्त: क्षेत्र तथा बाह्यक्षेत्र

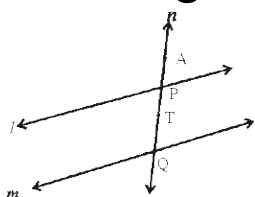
(Interior region and exterior region of two lines)

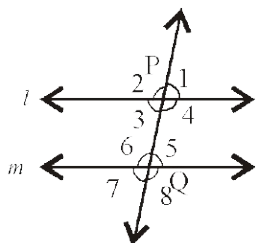
इन्हें कीजिए :

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर चित्र (i) और (ii) बनाइए। रेखा ℓ और m के बीच स्थित क्षेत्र पेंसिल से रंगिए।

पेंसिल से रंगा क्षेत्र जो रेखाओं के बीच है,अन्त: क्षेत्र है। शेष क्षेत्र जो रेखाओं ℓ और m के बीच नहीं है, वह बाह्यक्षेत्र है।

इस प्रकार हम कहेंगे कि दो रेखाओं काअन्त: क्षेत्र उन रेखाओं को छोड़ कर उनके बीच का क्षेत्र है, जब कि दो रेखाओं का बाह्यक्षेत्र उन दो रेखाओं तथा उनके अन्त: क्षेत्र को छोड़ कर शेष क्षेत्र है।

प्रयास कीजिए

चित्रानुसार बिन्दु A और T को रेखा पर दर्शाइए। बिन्दु A और T जिस रेखा पर स्थित है, उस रेखा का नाम क्या है ? क्याबिन्दु A रेखा ℓ और m के बाह्यक्षेत्र में स्थित है ? क्याबिन्दु T रेखाℓ और m केअन्त: क्षेत्र में स्थित है ?

9.7 तिर्यक रेखा द्वारा बने कोण

इन्हें कीजिए, सोचिए और चर्चा कीजिए

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर चित्रानुसार -

(i) दो रेखाएँ ℓ औरm खींचिए।

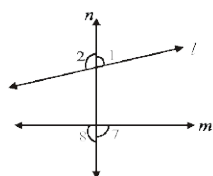
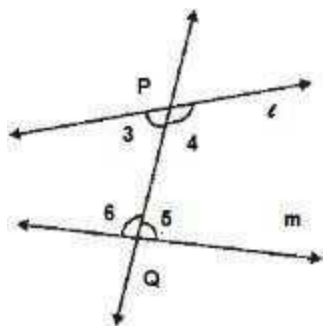
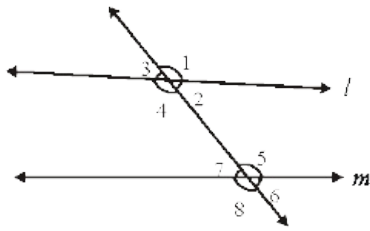
(ii) *एक तिर्यक रेखा* n *खींचिए, जो रेखा* ℓ *और* m *को काटे।*

(iii) *कटान बिन्दु को* P *और* Q *से प्रदर्शित कीजिए, जैसा कि चित्र में दिखाया गया है*

(iv) *तिर्यक रेखा* n *और दो रेखाओं* ℓ *तथा* m *से बने कोणों को चित्रानुसार* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 *और* 8 *से प्रदर्शित कीजिए।*

यदि दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटती है, तो कुल आठ कोण बनते हैं। चार कोण बाह्यक्षेत्र में और शेष चार कोण अन्तः क्षेत्र में स्थित होते हैं।

9.8 बाह्यकोण, अन्तः कोण, संगत कोण, एकान्तर कोण (एकान्तर अन्तः कोण तथा एकान्तर बाह्यकोण)

बाह्यकोण : *पार्श्वांकित चित्र में देखिए, रेखा* ℓ *और* m *को रेखा* n *काट रही है। तिर्यक रेखा और समान्तर रेखाओं से बने कोण* 1, 2, 7 *और* 8 *बाह्यक्षेत्र में स्थित हैं। इन्हे बाह्यकोण कहते हैं।*

अन्तः कोण : *चित्र में दो रेखाओं* ℓ *और* m *तथा रेखा* PQ *द्वारा बने कोणों को देखिए, इन कोणों को* 3, 4, 5, 6 *से प्रदर्शित किया गया है। ये कोण अन्तः क्षेत्र में स्थित हैं। इन्हें अन्तः कोण* (interior Angle) *कहते हैं। यह भी देखिए कि कोण* 4, 5 *तिर्यक रेखा के एक ओर और कोण* 3, 6 *दूसरी ओर स्थित हैं।*

संगत कोण : *चित्र में निम्नांकित कोणों के युग्मों (जोड़ों) को देखिए :*

(i) 4, 8 (ii) 1, 5(iii)3, 7   (iv) 2, 6

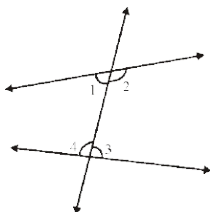
इसमें से प्रत्येक युग्म कोण, तिर्यक रेखा के एक ही ओर स्थित है। प्रत्येक जोड़े का एक कोणअन्त: क्षेत्र में, दूसरा कोण बाह्यक्षेत्र में स्थित है। इन्हें एक दूसरे का संगत कोण कहते है।

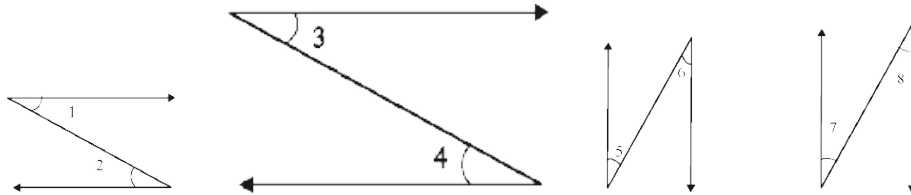
नीचे कुछ और संगत कोणों के युग्म दिये गये हैं। इन्हें अपनी अभ्यास पुस्तिका पर बनाइए।

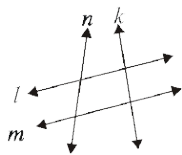
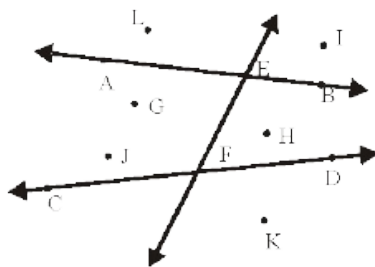
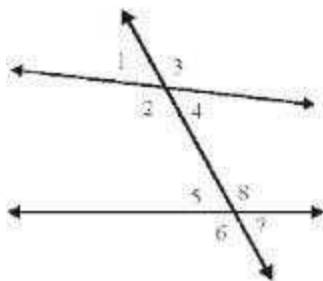
निष्कर्ष

यदि दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटती है, तो तिर्यक रेखा के एक ही ओर विभिन्न शीर्षो पर बने दो कोण जिनमें एकअन्त: क्षेत्र में और दूसरा बाह्यक्षेत्र में होता है, संगत कोण कहलाते हैं।

9.9.*एकान्तर अंत: कोण (एकान्तर कोण)* (Alternate angles)

पार्श्व चित्र में कोणों के युग्मों को देखिए : (i) 1,3 (ii) 2,4 ***प्रत्येक जोड़े के दोनो कोणअन्त: क्षेत्र में स्थित हैं, लेकिन तिर्यक रेखा के विपरीत दिशा में है। इन्हे एकान्तरअन्त: कोण या संक्षेप में एकान्तर कोण कहते है। यदि दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटती है, तो तिर्यक रेखा के विपरीत और कटान बिन्दुओं परअन्त: क्षेत्र में बने कोण एकान्तर कोण कहलाते है।***

प्रयास कीजिए

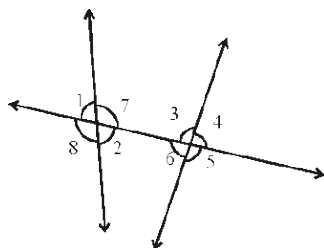
निम्नांकित चित्रों को अपनी अभयास पुस्तिका पर बनाइये तथा इनमें एकान्तर कोणों के युग्मों को पहचान कर लिखिए।

अभ्यास 9 (b)

1. ***पार्श्व चित्र में तिर्यक रेखाओं की पहचान कर अपनी अभ्यास पुस्तिका पर लिखें।***

2.***पार्श्व चित्र में बतायें कि रेखा*** AB ***और रेखा*** CD ***केअन्त: क्षेत्र और बाह्यक्षेत्र में क्रमश: कौन-कौन से बिन्दु हैं।***

3. ***पार्श्व चित्र को देखकर रिक्त स्थानों की पूर्ति अपनी अभ्यास पुस्तिका पर कीजिए।***

(i) $\angle$ 2 ***और*** ....***एकान्तर कोण है।***

(ii) ∠ 2 ***और*** .... ***संगत कोण है।***

(iii) ∠ 2 ***और*** ....***तिर्यक रेखा के एक ही ओर स्थितअन्त: कोण है।***

(iv) ∠ 3 ***और*** .... ***तिर्यक रेखा के एक ही ओर स्थित कोण है।***

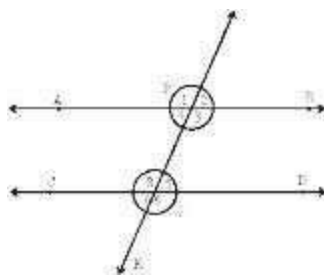
4.*पार्श्व चित्र को देखकर उत्तर दीजिए।*

(i)***एकान्तर कोणों के युग्मों के नाम बताइए।***

(ii)***संगत कोणों के युग्मों के नाम बताइए।***

(iii)***तिर्यक रेखा के एक ओर केअन्त: कोणों के नाम बताइए।***

(iv) ***तिर्यक रेखा के एक ही ओर स्थित बाह्यकोणों के नाम बताइए।***

9.10. *दो समान्तर रेखाओं और एक तिर्यक रेखा द्वारा बने कोण :*

इन्हें करिए, सोचिए और निष्कर्ष निकलिए :

(i) ***पटरी के दोनों किनारों से दो रेखाएँ*** AB ***और*** CD ***खींचिए।***

(ii) ***तिर्यक रेखा खींचिए जो दोनों रेखाओं को बिन्दुओं*** P ***तथा*** Q ***पर काटती है।***

(iii) ***तिर्यक रेखा और समान्तर रेखाओं के साथ बने आठ कोणों को*** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ***से प्रदर्शित कीजिए।***

(iv) ***चाँदा की सहायता से संगत कोणों के युग्म*** 1 ***और*** 8, 2 ***और*** 5, 3 ***और*** 6, 4 ***और*** 7 ***को नापिए।***

(v) ***अपने माप को अभ्यास पुस्तिका पर अंकित कीजिए***

∠1 = ... ∠8 = ...

$\angle 2$ = ... $\angle 5$ = ...

$\angle 3$ = ... $\angle 6$ = ...

$\angle 4$ = ... $\angle 7$ = ...

क्याकोण $\angle 1 = \angle 8, \angle 2 = \angle 5, \angle 3 = \angle 6, \angle 4 = \angle 7$ ***हैं***

हम पाते हैं कि $\angle 1 = \angle 8, \angle 2 = \angle 5, \angle 3 = \angle 6, \angle 4 = \angle 7$ ***इस प्रकार हम कह सकते हैं कि यदि दो समांतर रेखाओं को त्रिर्यक रेखा काटती है तो इस प्रकार बने संगत कोण बराबर होते है।***

निष्कर्ष

यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को काटती है, तो संगत कोण बराबर होते हैं।

2.*एकान्तर कोणों के युग्म* 4 ***और*** 5, 3 ***और*** 8 ***नापिए।***

$\angle 4$ =............ $\angle 5$ = ... $\angle 3$ = ...

$\angle 8$ = ...***क्या*** $\angle 4 = \angle 5$ ***और*** $\angle 3 = \angle 8$ = ...***हैं।***

निष्कर्ष **:**

यदि एक तिर्यक रेखा दो समान्तर रेखाओं को काटती है, तो एकान्तर कोण बराबर होते हैं।

3. (i)***अन्तः कोण*** $\angle 3$ ***और*** $\angle 5$ ***को नापिए तथा इन्हें जोड़िए क्या*** <3 + $\angle$ <5 = 180° ?

(ii) ***अन्तः कोण*** < 4 ***और*** < 8 ***को नापिए तथा इन्हें जोड़िए क्या*** $\angle$< 4 + $\angle$< 8 = 180° ?

***निष्कर्ष*:**

यदि एक तिर्यक रेखा दो समान्तर रेखाओं को काटती है, तो तिर्यक रेखा के एक ओर केअन्तः कोणों का योगफल 180° होता है, अर्थात ये कोण सम्पूरक होते हैं।

इन्हें करिए, सोचिए और निष्कर्ष निकलिए **:**

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर चित्रानुसार दो रेखाएं AB ***और*** CD ***खींचिए, जो***

समान्तर न हों, औरएक तिर्यक रेखा MR *खींचिए जो* AB *और* CD *को बिन्दुओ* P *और* Q *पर काटे। तिर्यक रेखा और असमान्तर रेखाओं से बने कोणों को* 1, 2, 3, 4, 5,6,7, 8 *से प्रदर्शित कीजिए, तथा देखिए कि* :

(i) *संगत कोण बराबर हैं या नहीं।*

(ii) *एकान्तर कोण बराबर हैं या नहीं।*

(iii) *तिर्यक रेखा के एक ही ओर केअन्त: कोणों का योगफल* 180° *है या नहीं।*

उपर्युक्त तीनों दशाओं में उत्तर नहीं आता है।

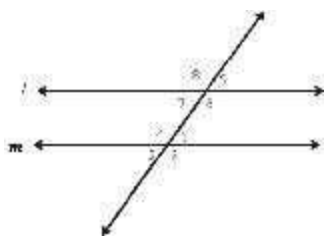
निष्कर्ष:

यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को काटती है, तो वे दोनों रेखाएं तभी समान्तर होंगी, जबकि

(i) *संगत कोण बराबर हो,*

या* (ii) *एकान्तर कोण बराबर हो,

या* (iii) *तिर्यक रेखा के एक ही ओर केअन्त: कोणों का योगफल* 180° *हो।

पार्श्व चित्र को देखकर निम्नलिखित प्रश्नों पर सामूहिक चर्चा कीजिए और निष्कर्ष निकलिए।

(i) $\angle$ 1 *के बराबर तीन कोणों के नाम लिखिए।*

(ii) $\angle$ 4 *के बराबर तीन कोणों के नाम लिखिए।*

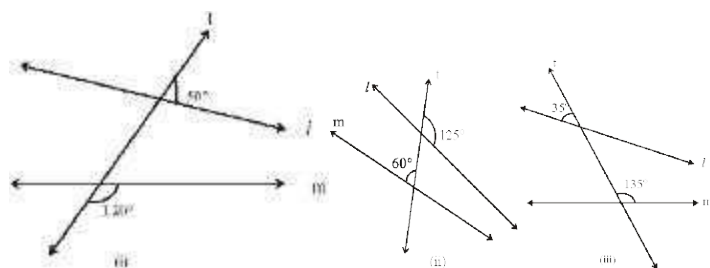
(iii) *यदि* $\angle$ 1 = 70, *तो* $\angle$ 7 = ...

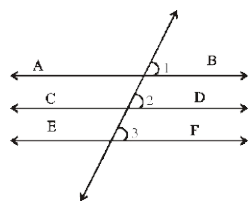
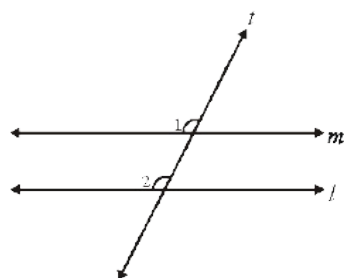
(iv) *यदि* $\angle$ 2 = 100, *तो* $\angle$ 3 =............

(v) *यदि* $\angle$ 3 = 60 *तो* $\angle$ 5 = ...

(vi) *यदि* $\angle$ 4 = 110, *तो* $\angle$ 6 = ...

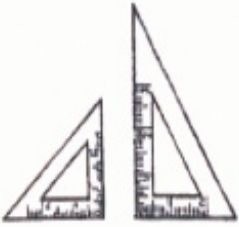
अभ्यास 9 (c)

1. *निम्नांकित चित्रों में दो रेखाओं* l *और* m *को एक तिर्यक रेखा* t *काटती है। कुछ कोणों के माप लिखे गये हैं बताइए कि क्या* l *और* m *समान्तर हैं* ? *यदि हैं तो इसका कारण बताइए। यदि समान्तर नहीं हैं तो उसका भी कारण बताइए।*

2. *चित्र में* AB||CD *और* CD||EF,

क्या AB||EF ? *कारण बताइए* ।

3. *चित्र में*, ∠ 1 *और* ∠ 2 *समान हैं। कारण बताइए जिससे यह सिद्ध हो सके कि* ℓ ||m

9.11 पटरी और गुनिया (सेट स्क्वायर) की सहायता से समांतर रेखाएँ खींचना

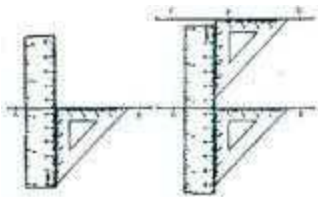
इन्हें करिए और परिणाम को याद रखिए

चित्र में दिखाए गये उपकरणों को ज्यमिति बाक्स में से निकलिए। इनका नाम गुनिया (सेट स्क्वायर) है। पहली गुनिया में एक कोण 90° *तथा शेष दोनों कोण* 45° *के हैं। दूसरी गुनिया में एक कोण* 90° *तथा शेष कोण* 30° *और* 60° *के हैं।*

इनकी सहायता से 30°, 45°60°*तथा* 90° *के कोण बनाइए और चाँदे से मापिए।*

पटरी और गुनिया (सेट स्क्वायर) की सहायता से दिये हुये बिन्दु से किसी दी हुई रेखा के समांतर रेखा खींचना:

उदाहरण **1:** *रेखा* AB *के समांतर उसके बाहर किसी दिये हुए बिन्दु* P *से जाने वाली रेखा खींचिए।*

हल :रेखा AB *पर गुनिया के समकोण बनाने वाली भुजा को दिये गये चित्र की भाँति रखिए ।*

- *गुनिया को इस प्रकार पकड़िए कि वह अपने स्थान पर स्थिर रहे।*
- *गुनिया की दूसरी भुजा को सटाकर एक पटरी रखिए।*
- *गुनिया को पटरी के सहारे इस प्रकार खिसकायें कि बिन्दु* P *गुनिया के*
- *गुनिया के सहारे रेखा* CD *खींचिए जो बिन्दु* P *से जाये। यही रेखा* CD

विचार करें

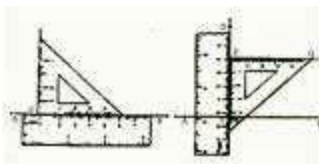
- *बिन्दु* P *से ऐसी कितनी समान्तर रेखाएँ खींची जा सकती हैं*?
- *इस संदर्भ में महान गणितज्ञ प्लेफेयर ने निम्नलिखित आभिगöहीत को प्रतिपदित किया है।*

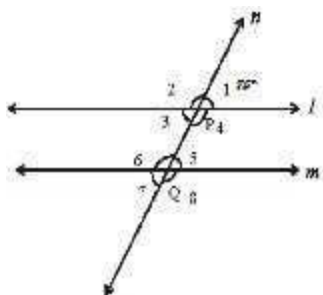
प्लेफेयर की आभिगृहीत - किसी दिये गये बिन्दु से किसी दी गयी रेखा के समांतर एक और केवल एक समांतर रेखा खींचा जा सकती है, जबकि बिन्दु रेखा पर न हो।

9.12 ***पटरी और गुनिया की सहायता से ही दी गयी रेखा से दी गयी दूरी पर समांतर रेखा खींचना***

उदाहरण* 2 : *रेखा* AB *से* 4.2 *सेमी दूरी पर स्थित बिन्दु* P *से* AB *के समांतर रेखा खींचिए।

हल* : *रेखा AB ***खींचिए। इस पर एक बिन्दु*** C ***अंकित कीजिए।***

- ***गुनिया की सहायता से बिन्दु*** C ***पर*** AB ***के लम्बवत्*** CD ***रेखा खां***è***चिए।***
- ***पटरी की सहायता से रेखा*** CD ***पर बिन्दु*** P ***इस प्रकार अंकित कीजिए कि*** CP = 4.2 ***सेमी।***
- ***गुनिया की सहायता से बिन्दु*** P ***पर*** CD ***के लम्बवत् रेखा*** PQ ***खींचिए।*** PQ ***रेखा ही*** AB ***के समान्तर*** 4.2 ***सेमी दूरी पर स्थित रेखा होगी। जैसा कि चित्र में दिखाया गया है।***

9.13 ***समांतर रेखाओं की विशेषताओं की सहायता से अज्ञात कोणों के नाप बताना तथा रेखाएँ खींचकर उनका सत्यापन करना।***

उदाहरण 3 : ***निम्नलिखित चित्र में*** $\ell \parallel m$, ***तिर्यक रेखा*** n ***इनको बिन्दुओं*** P ***और*** Q ***पर काटती है। इनके द्वारा बने कोणों को*** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ***और*** 8 ***से प्रदर्शित किया गया है। यदि*** $\angle 1 = 75°$, ***तो शेष सभी कोणों को ज्ञात कीजिए।***

हल : ***दिया है*** $\angle 1 = 75°$

लेकिन $\angle 3 = \angle 1$ (***शीर्षाभिमुख कोण हैं***)

$\therefore \quad \angle 3 = 75°$

पुन: $\angle 3 = \angle 5$ (***एकांतर कोण हैं***)

$\therefore \angle 5 = 75°$

अब $\angle 5 + \angle 4 = 180°$ (***तिर्यक रेखा के एक ही ओर केअन्त:कोण हैं***)

$\angle 4 = (180° - \angle 5)$

$\therefore \angle 4 = (180° - 75°) = 105°$

और $\angle 6 + \angle 3 = 180°$ (***तिर्यक रेखा के एक ही ओर केअन्त: कोण हैं***)

$\therefore \angle 6 = (180° - 75°) = 105°$

$\angle 2 = \angle 6 = 105°$ (***संगत कोण हैं***)

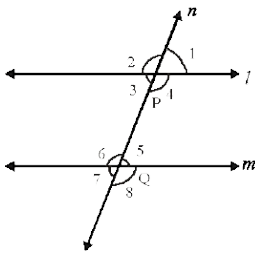
$\therefore \angle 7 = \angle 3 = 75°$ (***संगत कोण हैं***)

$\angle 8 = \angle 4 = 105°$ (***संगत कोण हैं***)

इस प्रकार $\angle 1 = 75°, \angle 2 = 105°, \angle 3 = 75°$

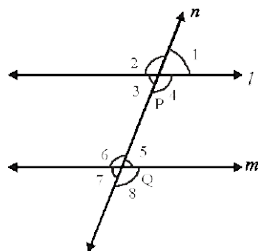
$\angle 4 = 105°, \angle 5 = 75° \ \angle 6 = 105°$

$\angle 7 = 75°$,***और*** $\angle 8 = 105°$

दो समांतर रेखा ℓ ***और*** m***खींचिए। एक तिर्यक रेखा*** n ***खींचिए जो रेखा***ℓ ***के साथ*** 75° ***का कोण बनाये। चित्रानुसार कोणों को*** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ***और*** 8 ***से प्रदर्शित कीजिए और चाँदा की सहायता से कोणों को मापिए और नाप से रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए।***

$\angle 2$ = ..., $\angle$... = ..., $\angle 4$ = ...

$\angle 5$ = ...,$\angle 6$ = ..., $\angle 7$ = ...

$\angle 8$= ....,

चित्र में दो समांतर रेखाए ℓ और m हैं। एक तिर्यक रेखा n खींचिए जो रेखा ℓ व रेखा m को क्रमश: P व Q बिन्दुओं पर काटती है। इससे आठ कोण बनते हैं,

(1) *एकांतर कोण बराबर होते हैं,*

अर्थात् $\angle 3 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 6$

(2) *संगत कोण बराबर होते हैं*,

अर्थात $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 8$, $\angle 2 = \angle 6$ *और* $\angle 3 = \angle 7$

(3) *तिर्यक रेखा के एक ओर के अन्त: कोणों का योगफल* 180° *होता है,*

अर्थात् $\angle 4 + \angle 5 = 180°$ *तथा* $\angle 3 + \angle 6 = 180°$

आप अपनी अभ्यास पुस्तिका में ऐसे ही चित्र बनाकर इसके कोणों को नापें और उपर्युक्त कथनों के सही होने की पुष्टि करें।

इस प्रकार हम इस निष्कर्ष पर पहुंचते हैं कि :

यदि दो समांतर रेखाओं को कोई तिर्यक रेखा काटती है, तो इनसे बनने वाले कोणों में :

1. *एकान्तर कोण बराबर होते हैं।*

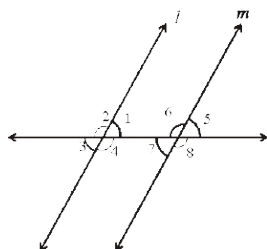
2. *संगत कोण बराबर होते हैं।*

3. *तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्त: कोणों का योगफल 180° है।*

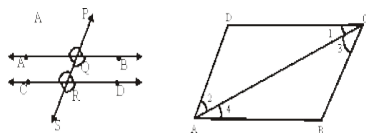
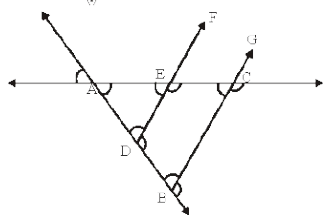
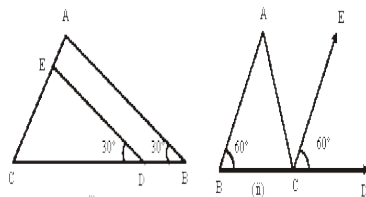
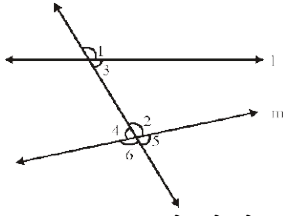
इन्हें भी कीजिए

1. *अपनी अभ्यास पुस्तिका पर रेखा* PQ *खींचिए और उसके बाहर एक बिन्दु* M *लेकर पटरी और गुनिया की सहायता से बिन्दु* M *से रेखा* PQ *के समान्तर रेखा खींचिए। क्या आप बिन्दु* M *से रेखा* PQ *के समान्तर एक से अधिक रेखा खींच सकते हैं*?

2. ***रेखा*** AB ***से*** 5 ***सेमी की दूरी पर स्थित बिन्दु*** P ***से पटरी और गुनिया की सहायता से*** AB ***के समांतर रेखा खींचिए।***

3. ***पार्श्व चित्र में*** $l \parallel m$ ***तथा यदि*** $\angle 5 = 60°$ ***तो*** $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 6$, $\angle 7$, $\angle 8$ ***का मान ज्ञात कीजिए***

दक्षता अभ्यास **9**

1. ***नीचे दिये गये चित्रों को देखकर एकान्तर कोणों के युग्म लिखिए :***

2. ***नीचे दिये गये चित्रों में समांतर रेखाओं के जोड़े को बताइए तथा तिर्यक रेखाओं के नाम लिखिए:***

3. ***नीचे दिये गये चित्र में तिर्यक रेखाओं द्वारा समांतर रेखाओं पर बनेअन्त: कोणो को बताइए ;***

4. ***यहाँ दिये गये चित्र को देखकर बताइए :***

(i) ***संगत कोणों के जोड़े कौन - कौन से हैं***?

(ii) ***तिर्यक रेखा के एक ओर बनेअन्त: कोणों को जोड़े कौन - कौन से हैं***?

(iii) ***एकान्तर कोणों के जोड़े कौन - कौन से हैं***?

5.*यदि दो समांतर रेखाओं को कोई एक तिर्यक रेखा काटे, तो निम्नलिखित कथनों मे से सही कथनों को छाँटिये*:

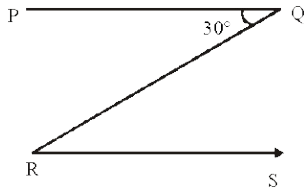
(i) ***एकान्तर कोणों के दो जोड़े बनते हैं?***

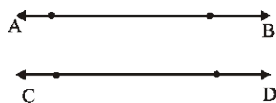
(ii) ***प्रत्येकअन्त: कोण के लिए एक संगत कोण होता हैं***?

(iii) ***संगत कोण स दैव बराबर होते हैं।***

(iv) ***संगत कोण एक दूसरे के सम्पूरक होते हैं*** ।

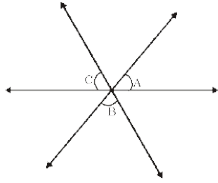
(v) ***एकान्तर कोण स दैव बराबर होते हैं*** ।

6. *नीचे दिये गये चित्र में* ∠ QRS ***कितना होगा, जबकि*** PQ || RS

7. 5.4 ***सेमी का रेखाखंड खींचिए। इससे*** 3.2 ***सेमी दूरी पर गुनिया और पटरी की सहायता से एक समांतर रेखा खींचिए।***

8.*निम्नांकित चित्र में दी गई समांतर रेखाओं के बीच की लम्बिक दूरी गुनिया व पटरी की सहायता से ज्ञात कीजिए।*

9. ***किसी रेखा के समांतर किसी बाह्य बिन्दु से पटरी और गुनिया की सहायता से***

रेखा किस प्रकार खींचेगे ? *चित्र बनाकर दिखाइए*।

10. *अलग- अलग चौड़ाई की दो पटरियाँ लेकर उनकी सहायता से समांतर रेखाओं के दो युग्म खींचिएऔर दोनों स्थितियों में उनके बीच की दूरी पटरी और सेट स्क्वायर की सहायता से ज्ञात कीजिए*।

विशेष प्रश्न : *निम्नांकित चित्र में यदि* ∠ A = 50 ° ∠ C = 60 ° *तो कोण* B *का मान होगा* :

(1) 60°

(2) 50°

(3) 70°

(4) 80° *उत्तर*: (3) 70°

इस इकाई से हमने सीखा

1\. *ऐसी दो परस्पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखाएं जिनके बीच का कोण* 90° *होता है, परस्पर लंब रेखाएं कहलाती हैं*।

2\. *एक तल में स्थित दो रेखाएं जो परस्पर कभी प्रतिच्छेद नहीं करतीं, समांतर रेखाएं कहलाती हैं*।

3\. *दो समांतर रेखाओं के बीच की दूरी प्रत्येक जगह समान होती है*।

4\. *तिर्यक रेखा, वह रेखा है जो दो या दो से अधिक रेखाओं को भिन्न - भिन्न बिन्दुओं पर काटती है*।

5\. *दो रेखाओं काअन्त: क्षेत्र उन रेखाओं को छोड़कर उनके बीच का क्षेत्र हैं जबकि दो रेखाओं का बाह्यक्षेत्र उन दो रेखाओं तथा उनकेअन्त: क्षेत्र को छोड़कर शेष क्षेत्र है*।

6.*यदि दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटती है, तो कुल आठ कोण बनते हैं*। *बाह्यक्षेत्र में बने चार कोण बाह्यकोण तथाअन्त: क्षेत्र में बने चार कोणअन्त: कोण*

कहलाते हैं।

7.*जब दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटती है तो संगत कोण, एकान्तर कोण, तिर्यक रेखा के एक ही ओर केअन्त: कोणों के युग्म बनते हैं।*

8.*यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को काटती है तो* :

(i) *संगत कोण बराबर होते हैं।*

(ii) *एकान्तर कोण बराबर होते हैं।*

(iii) *तिर्यक रेखा के एक ही ओर केअन्त: कोणों का योग* 180 ° ***होता है।***

9.*यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को काटती है तथा*

(iv) ***संगत कोण बराबर हों,***

या (v) *एकान्तर कोण बराबर हों,*

या (vi) *तिर्यक रेखा के एक ही ओर केअन्त: कोणों का योग* 180° ***हो, तो दोनो रेखाएं समांतर होती हैं।***

उत्तरमाला

***अभ्यास* 9 (a)**2.CD = 3 *सेमी*; 3 (i) *हाँ, आयत की सामने की भुजाएँ समांतर होती हैं*; (ii) *हाँ, बीच की दूरी प्रत्येक जगह समान हैं।*

***अभ्यास* 9 (b)**

2.*अन्त: क्षेत्र बिन्दु* G, H*और* J, *बाह्यक्षेत्र* I, K *और* L ; 3.(i)∠8, (ii) ∠6, (iii) ∠5, (iv) ∠8; 4. (i) ∠2, ∠3 ,ãõÀ ∠6, ∠7 (ii) (∠1, ∠3)(∠7, ∠4), (∠2,∠5) ,*और* (∠8, ∠6);

(iii) ∠2, ∠6 ,*और* ∠ 7,∠3 (iv)∠1,∠8 ,*और* ∠4, ∠5

***अभ्यास* 9 (c)**

1. *नहीं, संगत कोण तथा एकान्तर कोण बराबर नहीं हैं*; 2..*हाँ, संगत कोण बराबर हैं*;

3. ***संगत कोण हैं।***

दक्षता अभ्यास **9**

1.(i) ∠BQR, ∠QRC, ***तथा*** ∠AQR, ∠QRD; (ii) ∠DCA, ∠CAB ,***और*** ∠DAC, ∠ACB; 2. (i) DE|| AB, ***तिर्यक रेखा*** BC (ii) AB|| EC ***तिर्यक रेखा*** BD; 3. AB ***द्वारा बनाअन्त***: ***कोण*** ∠ EDB ***और*** ∠ CBD, AC ***द्वारा बना अन्त***: ***कोण*** ∠DEC ***और*** <ECB 4. ∠1, ∠2 ***तथा*** ∠3, ∠5 (ii) ∠ 3, ∠ 2 (iii) ∠3, ∠ 4 , ∠ 5 5. (i)***हाँ***(ii) ***हाँ***(iii) ***हाँ***(iv) ***नहीं*** (v) ***हाँ***; 6. 30°

इकाई:10 लघुतम समापवर्त्य एवं महत्तम समापवर्तक

- *अपवर्तक*
- *अपवर्त्य*
- *अपवर्तक, समापवर्तक तथा महत्तम समापवर्तक* (*म०स०*)
- *अपवर्त्य, समापवर्त्य तथा लघुतम समापवत्र्य* (*ल०स०*)
- *भाग विधि से म०स० ज्ञात करना*
- *दो संश्याओं एवं उनके ल०स० एवं म०स० के मध्य सम्बन्ध*
- *ल० स० तथा म० स० का दैनिक जीवन में उपयोग*

10.1 *भूमिका* :

आप अब तक प्राकृतिक संख्याओं, पूर्ण संख्याओं तथा पूर्णांक संख्याओं से भली भाँति परिचित हो चुके होंगे। इन संख्याओं में होने वाली योग, घटाना, गुणा तथा भाग की संक्रियाओं को भी आप जानते हैं। गुणा की संक्रिया द्वारा यह स्पष्ट है कि प्रत्येक संख्या को दो या दो से अधिक संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिख सकते हैं, इसी प्रकार भाग की संक्रिया के माध्यम से यह स्पष्ट होता है कि प्रत्येक संख्या स्वयं से या किन्हीं अन्य संख्याओं से पूरा-पूरा विभाजित हो जाती है या विभाजन के बाद कुछ शेष रह जाता है। आइए, हम देखें कि किसी प्राकृतिक संख्या को किन-किन संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिख सकते हैं तथा किसी प्राकृतिक संख्या के पूर्ण विभाजक संख्या को वैâसे प्राप्त करते हैं। किसी प्राकृतिक संख्या को पूर्णतः विभाजित करने वाली संख्याएँ उसकी अपवर्तक कहलाती हैं तथा वह संख्या प्रत्येक अपवर्तक का एक अपवत्र्य होती है। उदाहरणार्थ संख्या 15 *को पूर्णतः विभाजित करने वाली संख्याएँ* 1,3,5 *और* 15; 15 *के अपवर्तक हैं और स्वयं* 15; 1,3,5 *और* 15 *में से प्रत्येक संख्या का एक अपवत्र्य है। इस इकाई में हम प्राकृतिक संख्याओं के अपवर्तक, समापवर्तक*

और महत्तम समापवर्तक के साथ-साथ उनके अपवर्त्य, समापवर्त्य और लघुतम समापवर्त्य का अध्ययन करेंगे। इसके अतिरिक्त हम दो संख्याओं के गुणनफल तथा उनके महत्तम समापवर्तक और लघुतम समापवर्त्य के बीच के सम्बन्धों का भी अध्ययन करेंगे।

10.2 *अपवर्तक*

रमन के पास 12 *गोलियाँ हैं।* *वह इन्हें पंक्तियों में इस प्रकार व्यवस्थित करता है कि प्रत्येक पंक्ति में गोलियों की संख्या समान हो।* *वह इन्हें निम्नांकित विधियों से व्यवस्थित करता है और गोलियों की कुल संख्या की गणना करता है* :

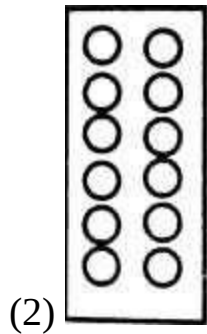
(1)

प्रत्येक पंक्ति में 1 *गोली*

पंक्तियों की संख्या = 12

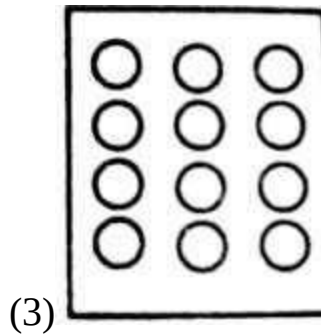
गोलियों की कुल संख्या = 1 ×12

= 12

(2)

प्रत्येक पंक्ति में 2 ***गोलियाँ***

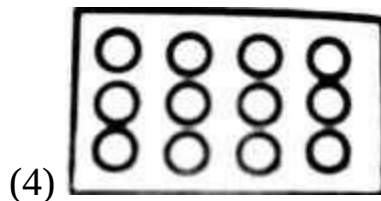
पंक्तियों की संख्या = 6

गोलियों की कुल संख्या = 2× 6 = 12

(3)

प्रत्येक पंक्ति में 3 ***गोलियाँ***

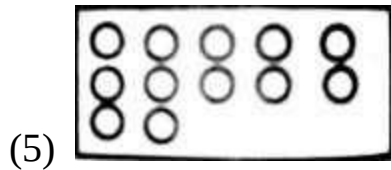
पंक्तियों की संख्या = 4

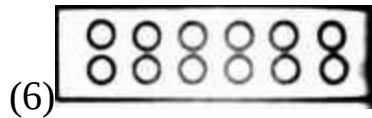
गोलियों की कुल संख्या = 3 × 4 = 12

(4)

प्रत्येक पंक्ति में 4 ***गोलियाँ***

पंक्तियों की संख्या = 3

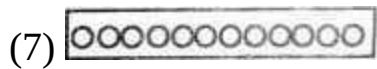
गोलियों की कुल संख्या = 4 × 3 = 12

(5)

प्रत्येक पंक्ति में 5 ***गोलियाँ रखने पर प्रत्येक पंक्ति में गोलियों की संख्या समान रखने की व्यवस्था नहीं बन पाती है, जैसा कि पाश्र्वांकित चित्र में देखते हैं।***

(6)

प्रत्येक पंक्ति में 6 ***गोलियाँ***

पंक्तियों की संख्या = 2

गोलियों की कुल संख्या = 6 × 2 = 12

(7)

प्रत्येक पंक्ति में क्रमश: 7, 8, 9, 10 ***और*** 11 ***गोलियाँ रखने पर प्रत्येक पंक्ति में गोलियों की संख्या समान रखने की व्यवस्था नहीं बनती है, परन्तु एक पंक्ति में*** 12 ***गोलियों को रखने पर एक पंक्ति बन जाती है।***

पंक्ति की संख्या = 1

गोलियों की कुल संख्या = 12 × 1 = 12

इन गणनाओं में रमन देखता है कि 12 ***को विभिन्न प्रकार*** (***विधियों***) ***से दो संख्याओं के गुणनफलों के रूप में लिखा जा सकता है।***

12 = 1 × 12;12 = 2 × 6; 12 = 3 × 4 ; 12 = 4 × 3

12 = 6 × 2;12 = 12 × 1;

इस प्रकार 1, 2, 3, 4, 6 ***और*** 12 ***संख्या*** 12 ***के विभाजक हैं। इन्हें*** 12 ***के अपवर्तक कहा जाता है।***

कोई संख्या जिन-जिन संख्याओं से पूरी-पूरी विभाजित हो जाती है वे संख्याएँ उस संख्या की अपवर्तक कहलाती हैं।

आइए अब अग्रांकित सारणी के माध्यम से अपवर्तक के कुछ रोचक तथ्यों पर विचार

करें और निष्कर्ष निकालें:

संख्या	अपवर्तक
2	1,2
6	1,2,3,6
15	1,3,5,15
69	1,3,23,69
84	1,2,3,4,6,7,12,14,28,42,84

निष्कर्ष :

हम देखते हैं कि -

•1 प्रत्येक संख्या का अपवर्तक है।

•प्रत्येक संख्या स्वयं का अपवर्तक होती है।

•किसी संख्या का प्रत्येक अपवर्तक उस संख्या का एक पूर्ण विभाजक है।

•किसी दी हुई संख्या के अपवर्तकों की संख्या परिमित (सीमित) होती है।

•किसी संख्या का प्रत्येक अपवर्तक उस संख्या से छोटा या उसके बराबर होता है।

10.3 अपवर्त्य (गुणज)

जब हम 20 = 4 ×5 लिखते हैं, तो कहते हैं कि 4 और 5 संख्या 20 के गुणनखंड हैं। इसे हम इस प्रकार भी कहते हैं कि यहाँ 20, संख्या 4 और 5 का गुणज अथवा अपव(त्र्य Multiple) हैं।

गुणज

↑

4 ×5 = 20

↓ ↓

अपवर्तक

इसी प्रकार 24 = 2× 12 यह दर्शाता है कि 2 और 12, संख्या 24 के अपवर्तक हैं तथा 24, 2 और 12 का एक अपवर्त्य है,

अपवर्त्य को गुणज भी कहते हैं।

किसी संख्या में प्राकृतिक संख्याओं (1, 2, 3, 4...) से गुणा करने पर उस संख्या के

विभिन्न गुणज अथवा अपवर्त्य प्राप्त होते हैं।

जैसे - 3 *के गुणज अथवा अपवर्त्य* , 3, 6, 9, ...

5 *के अपवत्र्य* ,5, 10, 15, 20, ... *आदि*

आइए अब निम्नांकित सारणी के माध्यम से अपवर्त्य के रोचक तथ्यों को देखें

संख्या	अपवत्र्य
1	1, 2, 3.....
7	7, 14, 21...
8	8, 16, 24 ...
10	10, 20, 30....
12	12, 24, 36 ...

संख्या और उसके अपवर्त्य

निष्कर्ष :

हम देखते हैं कि -

•*कोई संख्या अपने प्रत्येक अपवर्तक का अपवर्त्य होती है।*

•*किसी संख्या का प्रत्येक अपवर्त्य उस संख्या से बड़ा या उसके बराबर होता है।*

•*किसी संख्या के अपवर्त्य की संख्या अपरिमित (असीमित) होती है।*

•*प्रत्येक संख्या स्वयं का एक अपवर्त्य है।*

•*किसी संख्या में प्राकृतिक संख्याओं* (1,2,3,...) *से गुणा करने पर उस संख्या के विभिन्न अपवर्त्य प्राप्त होते हैं।*

सम्पूर्ण संख्याएँ :

आइए अब हम कुछ संख्याओं के अपवर्तकों पर विचार करें।

जैसे 6 *के सभी अपवर्तक* 1, 2, 3 *और* 6 *हैं।* *इनका योगफल* 1+ 2+ 3+ 6= 12;

जो संख्या 6 *का दो गुना है।*

इसी प्रकार 28 *के सभी अपवर्तक* 1, 2, 4, 7, 14 *और* 28 *हैं।* *इनका योगफल* 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28=56, *जो संख्या* 28 *का दो गुना है।*

यहाँ हम देखते हैं कि 6 और 28 के सभी अपवर्तकों का योगफल क्रमश: 6 और 28 का दो गुना है।

वह संख्या जिसके सभी अपवर्तकों का योगफल उस संख्या का दो गुना हो, एक सम्पूर्ण संख्या (Perfect Number) कहलाती है। अतः 6 और 28 सम्पूर्ण संख्याएं हैं।

इस प्रकार की कुछ और सम्पूर्ण संख्याएँ ढूँढ़िए।

अभ्यास 10 (a)

1. स्तम्भ 1 की संख्याओं का स्तम्भ 2 के अपवर्तकों से मिलान कीजिए :

स्तम्भ 1	स्तम्भ 2
(1) 15	(क) 1, 2, 4, 8, 16, 32
(2) 24	(ख) 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
(3) 21	(ग) 1, 3,5, 15
(4) 32	(घ) 1, 3, 7, 21
(5) 36	(ङ) 1, 2, 3, 4, 6, 12, 24

2. निम्नांकित संख्याओं के प्रथम पाँच गुणज लिखिए

(क) 3 (ख) 4 (ग)5 (घ) 9

3. स्तम्भ 1 की संख्याओं का स्तम्भ 2 के साथ मिलान कीजिए :

स्तम्भ 1	स्तम्भ 2
(1) 15	(क) 7 का गुणज
(2) 20	(ख) 8 का गुणज
(3) 16	(ग)50 का अपवर्तक
(4) 25	(घ 30 का अपवर्तक
(5) 35	(ङ) 20 का अपवर्तक

4.7 के सभी अपवर्त्य ज्ञात कीजिए जो 100 से कम हों।

5.496 के सभी अपवर्तकों को लिखिए और दिखाइए की यह एक सम्पूर्ण संख्या है।

10.4 अभाज्य और भाज्य संख्याएँ :

निम्नांकित सारणी में कुछ संख्याओं के अपवर्तक लिखे गये हैं, इन संख्याओं के अपवर्तकों की संख्या पर ध्यान दीजिए।

संख्या	अपवर्तक	अपवर्तकों की संख्या
1	1	1
2	1,2	2
3	1,3	2
4	1,2,4	3
5	1,5	2
6	1,2,3,6	4
7	1,7	2
8	1,2,4,8	4
9	1,3,9	3
10	1,2,5,10	4
11	1,11	2
12	1,2,3,4,6,12	6

कुछ संख्याएँ यथा 2, 3,5, 7, 11 इत्यादि के केवल दो अपवर्तक (1 और स्वयं वह संख्या) हैं। ये संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ (Prime Number) हैं।

"ऐसी संख्याएँ जिनके अपवर्तक 1 और स्वयं वह संख्या ही होती है, अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।"

कुछ संख्याएँ यथा 4, 6, 8, 9, 10 इत्यादि ऐसी हैं, जिनके दो से अधिक अपवर्तक हैं, ये संख्याएँ भाज्य संख्याएँ (Composite Number)हैं।

हम देखते हैं कि :

"वे संख्याएँ जिनके दो से अधिक अपवर्तक होते हैं भाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

संख्या 1 का एक ही अपवर्तक है। अतः 1 न तो भाज्य है और न अभाज्य है।

निष्कर्ष :

ऐसी संख्याएँ जो केवल 1 और स्वयं से ही पूरी-पूरी विभाजित होती हैं,

अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

ऐसी संख्याएँ जो 1 और स्वयं के अतिरिक्त अन्य संख्या/संख्याओं से भी पूरी-पूरी विभाजित होती हैं, भाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

10.5 *अभाज्य गुणनखंड* :

किसी संख्या के गुणनखंड करने की विधा से हम अवगत हो चुके हैं। अब हम कुछ उदाहरणों के माध्यम से अभाज्य गुणनखंड के विषय में विचार करेगें।

24= 2 × 12   24= 4 × 6   24= 3 × 8

=2 × 2 × 6   = 2 × 2 × 6   = 3 × 2 × 2× 2

=2× 2× 2× 3   = 2 × 2× 2× 3   = 2× 2× 2× 3

यहाँ 24 ***के उपर्युक्त तीनों प्रकार से किये गये गुणनखंडों में अंत में हम एक ही गुणनखंड*** 2× 2× 2× 3 ***पाते हैं। इस गुणनखंड में केवल*** 2 ***और*** 3 ***ही गुणनखंड हैं, ये अभाज्य संख्याएँ हैं। किसी संख्या का इस प्रकार का गुणनखंड अभाज्य गुणनखंडन*** (e) ***कहलाता है।***

आइए करें :

आइए 84 ***के अभाज्य गुणनखंडों को देखें*** :

84 = 2 × 42   84 = 4 × 21   84 = 12 × 7
= 2 × 2 × 21   = 2 × 2 × 21   = 4 × 3 × 7
= 2 × 2 × 3 × 7   = 2 × 2 × 3 × 7   = 2 × 2 × 3 × 7

84 = 6 × 14   84= 28 × 3

= 2 × 3 × 2 × 7   = 2 × 14 × 3
= 2 × 2 × 7 × 3

हम देखते हैं कि प्रत्येक ढंग में 84 ***के कुल*** 4 ***ही अभाज्य गुणनखंड प्राप्त होते हैं। इतना अवश्य है कि कहीं-कहीं गुणनखण्डों के क्रम बदले हुए हैं।***
इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि :
किसी भाज्य संख्या के अभाज्य गुणनखंडों की संख्या निश्चित होती है, परन्तु

गुणनखंडों का क्रम कुछ भी हो सकता है।

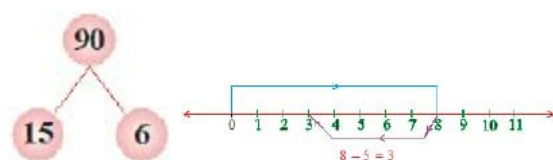
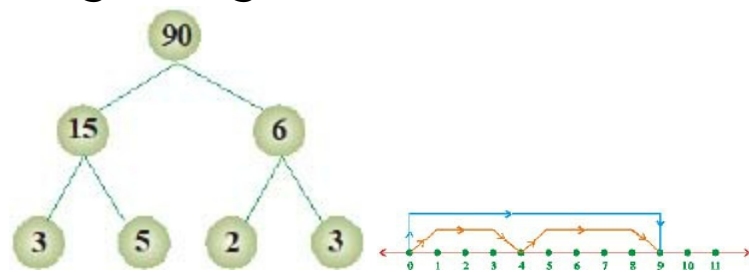
भाग-विधि द्वारा भी अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करना हम पहले ही सीख चुके हैं, यथा

2	84
2	42
3	21
	7

84= 2 × 2 × 3 × 7

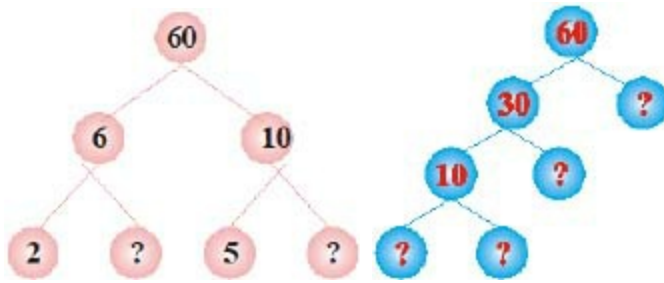
गुणनखंड वृक्ष (Factor Tree)

संख्या 90 ***लिखिए इसका कोई गुणनखंड अब*** 15 ***के गुणनखंड युग्म सोचिए सोचिए जैसे***

90= 15 × 6   15= 3×5

6 ***के गुणनखंड युग्म लिखिए***

इस प्रकार 90= 3×5×2×3, ***अथवा*** 90= 2×3×3×5, ***अथवा*** 90= 2×5×3×3 ***इत्यादि***

अभ्यास 10 (b)

1. 9 ***के अभाज्य गुणनखंड बताइए।***
2. ***यदि किसी संख्या के अभाज्य गुणनखंड*** 2, 2 ***और*** 3 ***हैं तो संख्या बताइए।***
3. ***एक संख्या के गुणनखंड*** 8 ***और*** 3 ***हैं। उसके अभाज्य गुणनखंड बताइए।***
4. ***यहाँ*** 60 ***के लिए दो भिन्न-भिन्न गुणनखंड वृक्ष दिये गये हैं। इनमें अज्ञात***

संख्याओं को अपने अभ्यास पुस्तिका पर लिखिए।

5. चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या लिखिए और उसे अभाज्य गुणनखंड के रूप में व्यक्त कीजिए।

6. पाँच अंकों की सबसे छोटी संख्या लिखिए और उसे अभाज्य गुणनखंड के रूप में व्यक्त कीजिए।

7. 1728 के अभाज्य गुणनखंड भाग-विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

8. निम्नांकित संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

112, 120, 135, 140, 150, 1228

9.80 और 90 के बीच अभाज्य संख्याएँ हैं :

(i) 81 और 83 (ii) 83 और 87

(iii) 81 और 89 (iv) 83 और 89

(रा.प्र.खो. परीक्षा - 2005)

10.6 अपवर्तक, समापवर्तक तथा महत्तम समापवर्तक

हम जानते हैं कि किसी संख्या को पूर्णतः विभाजित करने वाली संख्या उसका अपवर्तक (गुणनखंड) कहलाती है। नीचे सारणी देखकर विचार करें।

संख्या	अपवर्तक
48	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48
64	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64
72	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72

यहाँ हम देखते हैं कि उपर्युक्त संख्याओं के सम अथवा सार्व अपवर्तक 1, 2, 4 और 8 है जिनमें सबसे बड़ा 8 है। अतः संख्याओं 48, 64, और 72 का महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor) 8 होगा। महत्तम समापवर्तक को संक्षेप में म0स0 (या H.C.F) अथवा महत्तम (सबसे बड़ा) सार्व भाजक (Greatest common

divisor G.C.D.) *भी कहा जाता है।*

दो या अधिक दी हुई संख्याओं के सार्व अपवर्तकों में सबसे बड़ा सार्व अपवर्तक दी हुई संख्याओं का महत्तम समापवर्तक कहलाता है।

प्रयास कीजिए :

45, 60 *और* 75 *के सभी अपवर्तक लिखकर इनका महत्तम सार्व भाजक ज्ञात कीजिए।*

आइए सोचें और निष्कर्ष निकालें :

4 *के अपवर्तक* = 1, 2, 4
9 *के अपवर्तक* = 1, 3, 9

अतः दोनों का समापवर्तक केवल 1 *है, और यही* 4 *और* 9 *का म*0*स*0 *होगा। इस प्रकार की संख्याएं सह-अभाज्य संख्याएँ होती हैं।*

ऐसी दो संख्याएं जिनका म0स0 1 हो, सह-अभाज्य (Co- prime) संख्याएं कहलाती हैं।

पुनः देखिए ,

12 *के अपवर्तक* = 1, 2, 3, 4, 6, 12

18*के अपवर्तक* = 1, 2, 3, 6, 9, 18

इनके समापवर्तक 1, 2, 3 *और* 6 *हैं जिनमें सबसे बड़ा* 6 *है।*

*म*0*स*0 (12, 18) = 6

पुनः 8 *के अपवर्तक* = 1, 2, 4, 8

16 *के अपवर्तक* = 1, 2, 4, 8, 16

स्पष्टतः 8 *और* 16 *का म*0*स*0 = 8

उपर्युक्त तीनों उदाहरणों से यह निष्कर्ष निकलता है कि

सह-अभाज्य संख्याओं का म0स0 सदैव 1 होता है।

सामान्यतः संख्याओं का म0स0 या तो सभी संख्याओं से छोटा होता है अथवा उनमे से सबसे छोटी संख्या के बराबर होता है।

10.7 *गुणनखंड विधि से महत्तम समापवर्तक ज्ञात करना :*

48, 64 तथा 72 के अभाज्य गुणनखंडों को देखिए

$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

म0स0 ज्ञात करने के लिए निम्नांकित क्रियाविधि सुगम है-

(1) पहले सभी संख्याओं के अभाज्य गुणनखंडों को देखकर उनमें से सबसे छोटा अभाज्य गुणनखंड चुनिए।वह जितनी बार सभी संख्याओं के गुणनखंडों में सर्वनिष्ठ हो, उसे उतनी ही बार उतार लीजिए।

(2) इसी क्रम में उससे बड़े अभाज्य गुणनखंड को चुनकर वह जितनी बार सभी संख्याओं के गुणनखंड में सर्वनिष्ठ हो, उसे भी उतनी ही बार उतार लीजिए।

(3) इसी प्रकार सभी सर्वनिष्ठ गुणनखंडों को उतार लीजिए।

(4) सभी का गुणा करके अभीष्ट म0स0 ज्ञात कर लीजिए।

अतः उपर्युक्त उदाहरण में 48, 64 और 72 का म0स0= $2 \times 2 \times 2 = 8$

इसे इस प्रकार भी कर सकते हैं

$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3$

$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

यहाँ 2 की न्यूनतम घात 23 ही सर्वनिष्ठ गुणनखंड है।

अतः म0स0= 23= $2 \times 2 \times 2 = 8$

उदाहरण **1:** 180 एवं 192 का म0स0 गुणनखंड-विधि से ज्ञात कीजिए।

हल: हम देखते हैं कि दी गई संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड निम्नवत् हैं

$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

$192 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

हम देखते हैं कि इन दोनों के गुणनखंडों में 2 कुल दो बार सर्वनिष्ठ है और 3 केवल एक बार।

अतः अभीष्ट म0स0= $2 \times 2 \times 3 = 12$

10.8 भाग-विधि से महत्तम समापवर्तक ज्ञात करना **:**

इसे निम्नांकित उदाहरणों से समझा जा सकता है :

उदाहरण* 2 :** 306 ***तथा 630 ***का म*0*स*0 *भाग-विधि से ज्ञात कीजिए*** ।

```
306) 630(2
     -612
     ----
     18)306(17
        -18
        ---
         126
        -126
        ----
           0
```

हल* : *यहाँ बड़ी संख्या 630 ***में छोटी संख्या*** 306 ***से भाग दिया गया है*** ।***प्राप्त शेषफल*** 18 ***से पुनः प्रथम भाजक*** 306 ***में भाग दिया गया है*** ।***शेषफल शून्य आने पर अंतिम भाजक*** 18 ***ही अभीष्ट म*0*स*0 *होगा*** ।

***म*0*स*0**= 18

***ध्यान दीजिए* :**

671, 781 ***और*** 1441 ***का म*0*स*0 *भाग-विधि से ज्ञात कीजिए*** ।

***हल* :**

अतः संख्याओं 671 ***तथा*** 781 ***का म*0*स*0**= 11

ध्यान दें,

दो से अधिक संख्याएँ होने पर किन्हीं दो के म*0*स*0 *के साथ तीसरी संख्या का म*0*स*0 *ज्ञात करते हैं। यही क्रिया अगली संख्याओं के साथ भी करते हैं । ***अंतिम म*0*स*0 *ही अभीष्ट म*0*स*0 *होता है*** ।

उदाहरण 3: 2052, 3996 ***और*** 7380 ***का म*0*स*0 *भाग-विधि से ज्ञात कीजिए*** ।

***हल* :**

अतः 2052 ***तथा*** 3996 ***का म*0*स*0**= 108

आपस में विचार कीजिए और निष्कर्ष निकालिए

1.***दो अभाज्य संख्याओं का म*0*स*0 *क्या होगा*** ?

2.***दो क्रमागत सम संख्याओं का म*0*स*0 *क्या होगा*** ?

3.***किन्हीं दो सम संख्याओं का म*0*स*0 *सम होगा या विषम*** |

4.***एक सम और एक विषम संख्या का म*0*स*0 *सम होगा या विषम***|

5 8 *और* 12 *के समापवर्तक बताइए* ।
6.12 *और* 16 *का म*0*स*0 *बताइए* ।
7.*यदि दो संख्याओं का म*0*स*0 6 *हो तो बताइए कि* 6 *का भाग पहली संख्या में देने पर शेषफल क्या मिलेगा* ?

अभ्यास 10 (C)

1. *अभाज्य गुणनखंडन द्वारा निम्नांकित संख्याओं के म*0*स*0 *ज्ञात कीजिए*
(i) 144, 198 (ii) 225, 450
(iii) 13, 39, 273 (iv) 120, 144, 204
(v) 101, 909, 1111 (vi) 625, 3125, 15625

2. *भाग-विधि द्वारा निम्नांकित सख्याओं का म*0*स*0 *ज्ञात कीजिए* :
(i) 442, 1261 (ii) 935, 1320
(iii) 1624, 522, 1276 (iv) 2241, 8217, 747

3. *वह बड़ी से बड़ी संख्या बताइए जिससे* 125 *और* 94 *को भाग देने पर प्रत्येक दशा में* 1 *शेष रहे*।
(*संकेत प्रत्येक संख्या से* 1 *घटाने पर प्राप्त संख्याओं* 124 *तथा* 93 *का म*0*स*0 *ही अभीष्ट संख्या होगी* ।)

4. *वह बड़ी से बड़ी संख्या बताइए जिससे* 49,59 *और* 109 *को भाग देने पर क्रमश*: 1, 3 *और*5 *शेष रहे*।

5. *निम्नांकित भिन्नों को अंश एवं हर में उनके म*0*स*0 *से भाग देते हुए सरलतम रूप में बदलिए* :
(i) $\frac{256}{1444}$ (ii) $\frac{286}{468}$ (iii) $\frac{6633}{15075}$

10.9. ***अपवर्त्य, समापवर्त्य तथा लघुतम समापवर्त्य* (Lowest common Multiple or LCM)**

*निम्नांकित सारणी को देखिए*v

8 के अपवत्र्य	8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, ...
12 के अपवत्र्य	12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, ...
8 और 12 के समापवत्र्य	24, 48, 72, ...
8 और 12 का लघुतम समापवत्र्य	24

यहाँ हम देखते हैं कि 8 और 12 के सार्व अपवर्त्य 24, 48, 72 ... हैं परन्तु लघुतम सार्व अपवर्त्य (समापवर्त्य) 24 है। अतः 8 और 12 का लघुतम समापवर्त्य 24 है।

दो या दो से अधिक दी हुई संख्याओं के सबसे छोटा सम या सार्व अपवर्त्य को दी हुई संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य कहते हैं।

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित सारणी को अपनी अभ्यास पुस्तिका पर लिख कर पूरा कीजिए :

14 के अपवत्र्य	
21के अपवत्र्य	
14 और 21 के समापवत्र्य	
14 और 21 का लघुतम समापवत्र्य	

निष्कर्ष :

संख्याओं के समान अपवर्त्यों को उनका समापवर्त्य कहते हैं।

संख्याओं के समापवर्त्यों में से सबसे छोटा समापवर्त्य ही उनका लघुतम समापवर्त्य (ल0स0) होता है।

संख्याओं का ल0 स0 उन संख्याओं में से प्रत्येक द्वारा पूर्णतः विभाज्य होता है।

10.9.1. अभाज्य गुणनखंडों द्वारा लघुतम समापवर्त्य ज्ञात करना :

अभाज्य गुणनखंडों द्वारा संख्याओं का ल0स0 ज्ञात करने की विधि से हम परिचित हैं, जैसे -

$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

अतः ल0स0 $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 48$

इसी प्रकार

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$

$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$

अतः ल0स0 $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 2520$

ध्यान दीजिए, लघुतम समापवर्त्य ज्ञात करने हेतु :

1. सर्वप्रथम संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

2. सभी संख्याओं के अभाज्य गुणनखंडों को देखकर सबसे छोटा गुणनखंड चुनिए। वह जिस किसी संख्या में सबसे अधिक बार आया हो, उसे उतनी ही बार उतार लीजिए।

3. इसके बाद उससे बड़े अभाज्य गुणनखंड को चुनिए। वह भी जिस किसी संख्या में सबसे अधिक बार आया हो, उसे भी उतनी ही बार उतार लीजिए।

4. इसी क्रम में सभी गुणनखंडों को उतार कर सभी का गुणा कर ल0स0 ज्ञात कर लीजिए।

उपर्युक्त उदाहरणों में अभाज्य गुणनखंडों को घात के रूप में भी व्यक्त करके ल0स0 ज्ञात किया जा सकता है। देखिए

$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

$\therefore$ **ल0स0** $= 2^4 \times 3 = 48$

तथा $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5$

$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$

ल0स0 $= 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2520$

ध्यान दीजिए कि यहाँ ल0स0 ज्ञात करने के लिए अभाज्य गुणनखंडों की अधिकतम घातें ली गयी हैं जिनका सर्वनिष्ठ होना आवश्यक नहीं है।

10.9 2. भाग विधि से लघुतम समापवर्त्य ज्ञात करना :

उदाहरण 4 : 56, 70 **और** 84 का लघुतम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल :

2	56, 70, 84
2	28, 35, 42
7	14, 35, 21
	2, 5, 3

अत: ल0स0 $= 2 \times 2 \times 7 \times 2 \times 5 \times 3$

$= 840$

प्रयास कीजिए :

100, 98 और 77 का ल0स0 ज्ञात कीजिए।

ध्यान दीजिए, भाग-विधि से ल0स0 ज्ञात करने हेतु :

- सर्वप्रथम कम से कम दो संख्याओं में उभयनिष्ठ सबसे छोटी अभाज्य संख्या से सभी संख्याओं में भाग देते हुए भागफल उन संख्याओं के ठीक नीचे उतार लेते हैं।
- जिस संख्या में भाग नहीं जाता है, उसे उसके नीचे यथावत् (ज्यों का त्यों) उतार लेते हैं।
- इस क्रिया को तब तक करते जाते हैं जब तक सभी संख्याओं के नीचे सह-अभाज्य संख्याएँ न आ जाएँ।

इस प्रकार प्राप्त सभी भाजक संख्याओं तथा अंतिम पंक्ति की सह-अभाज्य संख्याओं का परस्पर गुणा करके अभीष्ट ल0स0 प्राप्त कर लेते हैं।

उदाहरण 5: 16,32 और 64 का ल0स0 ज्ञात कीजिये

हल :

2	16,	32,	64
2	8	16,	32
2	4,	8,	16
2	2.	4,	8
2	1.	2,	4
	1	1	2

∴ ल0स0 $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$

उदाहरण 6 : 8 और 15 का ल0स0 ज्ञात कीजिए।

हल: पहली विधि $8 = 2 \times 2 \times 2$

$15 = 3 \times 5$

∴ ल0स0 $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120$

दूसरी विधि

2	8, 15
2	4, 15
2	2, 15
3	1, 15
	1, 5

∴ ल0स0 = 2×2×2×3×5 = 120

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है :

दो या दो से अधिक संख्याओं का ल0स0 उनमें से किसी से भी छोटा नहीं हो सकता वह उनमें से सबसे बड़ी संख्या के बराबर हो सकता है|

किन्हीं सह-अभाज्य संख्याओं अथवा अभाज्य संख्याओं का ल0स0 उन संख्याओं के गुणनफल के बराबर होता है|

अभ्यास 10(d)

1. *प्रश्न वाचक चिह्न में उचित संख्या भरिए :*

6	18	18

11	77	7

14	?	21

(*क*) 34 (*ख*) 42 (*ग*) 24 (*ग*) 28

2.*निम्नांकित संख्या-युग्मों के ऐसे समापवर्त्य ज्ञात कीजिए जिनका मान* 80 *से कम हो* ।

(*क*) 9 *और* 15 (*ख*) 6 *और* 10

(*ग*) 8 *और* 9 (*घ*) 7 *और* 11

3. 60 *तक की उन संख्याओं को ज्ञात कीजिए जो* 4 *और* 6 *दोनों से पूर्णतः विभाज्य है* ।

4. *निम्नांकित संख्याओं का ल*0*स*0 *ज्ञात कीजिए*

(*क*)5, 10, 15 (*ख*) 16, 44, 64 (*ग*) 10, 65, 91

(*घ*) 22, 121, 418 (*ङ*) 14, 28, 35,56

5. *वह छोटी से छोटी संख्या बताइए जो* 20, 25 *और* 40 *से पूर्णतः विभाज्य हो* ।

(*संकेत : अभीष्ट संख्या दी गयी संख्याओं की ल*0*स*0 *होगी*)

6. *वह छोटी से छोटी संख्या बताइए जिसमें यदि* 3 *जोड़ दें तो योगफल* 36, 45

और50 से अलग-अलग पूरा-पूरा विभाजित हो जाय।

7. वह छोटी से छोटी संख्या बताइए जिसमें 75, 80 और 135 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में 3 शेष बचे।

8. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 7 घटाने पर शेष बची संख्या 20, 28, 35 और 105 से पूर्णतः विभक्त हो।

9. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 35, 45 तथा55 से भाग देने पर क्रमशः 17, 27 तथा 37 शेष बचें।

(संकेत :ध्यान दें, प्रत्येक भाजक और उसके शेषफल में समान अन्तर 18 है। अतः अभीष्ठ संख्या= ल0स0 - 18)

10.10. दो संख्याओं के महत्तम समापवर्तक और लघुतम समापवर्त्य में सम्बन्ध :

आइए तर्क करें और निष्कर्ष निकालें :

प्रथम संख्या	द्‌वितीय संख्या	म0स0	ल0स0	म0स × ल0स	प्रथम संख्या ×द्‌वितीय संख्या
6	8	2	24	2 × 24 = 48	6 × 8 = 48
4	9	1	36	1 × 36 = 36	4 × 9 = 36
30	36	6	180	6 × 180 = 1080	30 × 36 = 1080
35	40	5	280	6 × 180 = 1080	35 × 40 = 1400

यहाँ हम देखते हैं कि उपर्युक्त सारणी में दोनों संख्याओं का गुणनफल उनके महत्तम समापवर्तक तथा लघुतम समापवर्त्य के गुणनफल के बराबर है।

निष्कर्ष :

दो संख्याओं की स्थिति में

म0स0× ल0स0= प्रथम संख्या × द्वितीय संख्या

अतः दो संख्याओं का ल0स0 = (संख्याओं का गुणनफल) / म०स०

किन्हीं दो बड़ी संख्याओं का ल0स0 ज्ञात करने में उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग करना उपयोगी एवं सुगम होता है।

सोचिए, चर्चा कीजिए :

क्या तीन संख्याओं में यह सम्बन्ध होगा ?

ध्यान दें, दो से अधिक संख्याओं के म0स0 और ल0स0 में यह सम्बन्ध नहीं होता है। जैसे5, 15 और 20 का ल0स0= 60 और म0स0=5 परन्तु5 × 60 ≠ 5 × 15 × 20

उदाहरण 7 : 117 *और* 221 *का ल*0*स*0 *ज्ञात कीजिए।*

हल:

```
117) 221(1
     117
     -------
     104) 117 (1
          104
          -------
          13) 104 (8
              104
              -------
              0
```

*अतः म*0*स*0 = 13

$$\therefore \text{ल0स0} = \frac{\text{संख्याओं का गुणनफल}}{\text{उनका म0स0}}$$

$$= \frac{117 \times 221}{13} = 1989$$

प्रयास कीजिए :

*दो संख्याओं का म*0*स*0 18 *तथा ल*0*स*0 504 *है। यदि एक संख्या* 72 *है, तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।*

*हम जानते हैं कि संख्याओं का म*0*स*0 *उनमें से प्रत्येक को पूर्णतः विभाजित करता है। इसी प्रकार संख्याओं के ल*0*स*0 *में प्रत्येक संख्या का पूरा-पूरा भाग जाता है।*

इससे निष्कर्ष निकलता है कि

*दो या अधिक संख्याओं का म*0*स*0 *उनके ल*0*स*0 *का एक अपवर्तक होता है तथा ल*0*स*0 *उनके म*0*स*0 *का एक अपवर्त्य होता है।*

अभ्यास 10 (e)

1.*रिक्त भाग में उचित विकल्प भरिए :*

15	5	25
12		18

(*क*) 3 (*ख*) 6 (*ग*) 9 (*घ*) 12

2. *निम्नांकित प्रत्येक संख्या-युग्म के लिए दिखाइए कि ल*0*स*0 *तथा म*0*स*0 *का*

गुणनफल संख्याओं के गुणनफल के बराबर होता है।

(*क*) 14, 21 (*ख*) 25, 65 (*ग*) 32, 96

(*घ*) 81, 135 (*ङ*) 15, 125

3. *दो संख्याओं का म*0*स*0 16 *तथा उनका गुणफल* 6400 *है। उनका ल*0*स*0 *ज्ञात कीजिए।*

4. *क्या दो संख्याओं का म*0*स*0 14 *और उनका ल*0*स*0 204 *हो सकता है*?*उत्तर की पुष्टि में कारण दीजिए।*

5. 2211 *तथा*5025 *का म*0*स*0 *भाग-विधि से ज्ञात करके इसके आधार पर इन संख्याओं का ल*0*स*0 *ज्ञात कीजिए।*

6. 95, 285 *और* 399 *के लघुतम समापवर्त्य में इनका महत्तम समापवर्तक कितनी बार सम्मिलित है*?

7. 17 *वह बड़ी से बड़ी संख्या है जो संख्याओं* 102 *तथा* 187 *को पूर्णतः विभाजित करती है। इसके आधार पर वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसको ये संख्याएँ पूरा-पूरा विभाजित करती हैं।*

10.11 *म*0*स*0 *तथा ल*0*स*0 *पर आधारित समस्याओं का हल*:

*दैनिक जीवन की ऐसी बहुत-सी समस्याएँ हैं जिनका हल म*0*स*0 *अथवा ल*0*स*0 *पर आधारित होता है। ऐसे कुछ उदाहरण अiरांकित हैं*|

उदाहरण **8:** 30 *डेसीमीटर लम्बे और* 25 *डेसीमीटर चौड़े कमरे में वर्गाकार चौके लगाने हैं जिससे कमरे का फर्श पूरा-पूरा ढँक जाए। इन चौकों की न्यूनतम संख्या क्या होगी जबकि कोई भी चौका तोड़ा या काटा नहीं जाता है*?

*वर्गाकार चौकोर पत्थरों की न्यूनतम संख्या के लिए यह आवश्यक है कि पत्थर बड़े से बड़े आकार के हों। यह तभी संभव होगा जब पत्थर के वर्गाकार चौके की भुजा कमरे की लम्बाई और चौड़ाई का म*0*स*0 *हो। इस प्रकार यह एक ऐसी समस्या है जो म*0*स*0 *ज्ञात करके हल की जा सकती है।*

हल :

30 = 2 × 3 × 5
25 = 5 × 5
अतः म0स0=5
चूँकि वर्गाकार चौका की भुजा=5 डेसीमी
हम जानते हैं कि कमरे के फर्श को पूरा-पूरा ढँकने पर लगाये जाने वाले कुल चौकों का सम्मिलित क्षेत्रफल फर्श के क्षेत्रफल के बराबर होगा।
फर्श का क्षेत्रफल= लम्बाई × चौड़ाई
=30 डेसीमी × 25 डेसीमी
चौकोर वर्गाकार पत्थर का क्षेत्रफल=5 डेसीमी ×5डेसीमी
अत: चौकोर पत्थरों की न्यूनतम संख्या = $\frac{30 \text{ डेसीमी} \times 25 \text{ डेसीमी}}{5 \text{ डेसीमी} \times 5 \text{ डेसीमी}}$
= 6 × 5
= 30

उदाहरण 9: एक खेल-प्राशिक्षक खेल के मैदान में बच्चों को 10, 12 या 15 के समूहो में बाँट कर बच्चों को अलग-अलग खेल सामाiरी प्रदान करते हैं। इस प्रकार किसी भी दशा में कोई बच्चा छूटता नहीं है। बताइए कि बच्चों की न्यूनतम संख्या क्या होगी ?
स्पष्ट है कि बच्चों की न्यूनतम संख्या 10, 12 और 15 का ल0स0 होगी। इस प्रकार इस समस्या का हल ल0स0 द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

हल :

2	10,	12,	15
3	5,	6,	15
5	5,	2,	5
	1,	2,	1

ल0स0 = 2 × 3 × 5 × 2
= 60
अतः बच्चों की न्यूनतम संख्या= 60

अभ्यास 10(f)

1. रिक्त भाग में नीचे दिये गये विकल्पों में से सही विकल्प चुनकर भरिए।

8	24	12
15		35

(क) 45 (ख) 65

(ग) 105 (घ) 100

2.

24	12	60
21		49

(क) 14 (ख) 7

(ग) 21 (घ) 28

3. *एक प्राथमिक विद्यालय की कक्षा* 1 *में* 120 *और कक्षा* 2 *में* 90 *छात्र हैं। इन्हें बड़ी से बड़ी समान छात्र-संख्या में बाँटने पर प्रत्येक समूह में छात्रों की संख्या कितनी होगी* ?

4. *कापियों की वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो* 3, 6, 12 *व* 15 *के बण्डलों में अलग-अलग किन्तु बराबर-बराबर बाँटी जा सकें*â ।

5. 55 *मीटर लम्बे और* 22 *मीटर चौड़े एक मैदान में वर्गाकार दरियाँ बिछानी हैं। एक ही नाप की कम से कम बिछायी जाने वाली दरियों की संख्या ज्ञात कीजिए।*

6. *तीन ग्रह किसी तारे के चारों ओर क्रमशः* 200, 250 *और* 300 *दिनों में एक चक्कर लगाते हैं। यदि वे किसी दिन तारे के एक ही ओर एक सीध में हों तो कितने दिनों में पुनः वे उसी स्थिति में आ जायेंगे।*

7. *कपड़े के तीन थानों में क्रमशः* 125 *मी,* 220*मी, और* 275 *मी कपड़ा है। बड़ी से बड़ी नाप का फीता बताइए जो तीनों थानों के कपड़ों को पूरा-पूरा नाप सके।*

8. *छः घण्टियाँ एक साथ बजनी आरंभ हुई। यदि वे क्रमशः* 2, 4, 6, 8, 10 *और* 12 *सेकण्ड के अन्तराल से बजती हों तो* 30 *मिनट में वे कितनी बार इकट्ठी बजेंगी* ?

9. *एक टोकरी के आमों को एक बालिका* 4, 6 *और* 9 *की ढेरियों में सजाती है। प्रत्येक बार* 1 *आम टोकरी में शेष बच जाता है।बताइए कि टोकरी में कम से कम*

कितने आम हैं ?

(*संकेत ल*0*स*0= 36, *इसमें* 1 *जोड़ने पर टोकरी में आमों की न्यूनतम संख्या ज्ञात हो जायेगी* ।)

10.*चार पहियों की परिधियाँ क्रमशः*50 *सेमी*, 60 *सेमी*, 90*सेमी और* 100 *सेमी लम्बी हैं* । *कम से कम कितनी दूरी चलने में चारों पहिए साथ-साथ पूरे-पूरे चक्कर लगायेंगे* ?

11.*एक व्यापारी हर चौथे दिन कानपुर जाता है जबकि दूसरा व्यापारी हर दसवें दिन*। *वे दोनों यदि* 3 *जनवरी को कानपुर एक साथ गये हों तो अगली तिथि बताइए जब वे पुनः एक साथ कानपुर जायेंगे*।

***दक्षता अभ्यास*-10**

1.*निम्नलिखित में सत्य* / *असत्य कथन अपनी अभ्यास पुस्तिका में लिखिए* ।

(i)*दो संख्याओं का गुणनफल उनके ल*0*स*0 *और म*0*स*0 *के गुणनफल से छोटा होता है* ।

(ii)*यदि कोई संख्या किन्हीं दो संख्याओं से अलग-अलग पूर्णतः विभाज्य हो तो वह उनके गुणनफल से भी सदैव पूर्णतः विभाज्य होगी* ।

(iii)*एक भाज्य तथा दूसरी अभाज्य संख्याएँ आपस में सह-अभाज्य हो सकती हैं* ।

(iv) *अभाज्य संख्याएँ सह-अभाज्य भी होती हैं* ।

(v) *किसी संख्या का इकाई का अंक विषम हो तो वह* 2 *से विभाज्य होती है* ।

(vi) 724 *में* 4 *का पूरा-पूरा भाग जाता है* ।

(vii) *एक संख्या* 12 *से विभाज्य है तो वह* 3 *से भी विभाज्य होगी* ।

(viii)*दी गई संख्याओं का ल*0*स*0 *उनमें से सबसे बड़ी संख्या से छोटा नहीं हो सकता* ।

(ix) *किन्हीं संख्याओं का ल*0*स*0 *उनके म*0*स*0 *का अपवत्र्य नहीं होता है* ।

(x) *सह-अभाज्ह संख्याओं का म*0*स*0 1 *होता है* ।

2.*निम्नांकित वें गथम पाँच अपवत्र्ह लिखिए* :

(i) 13 (ii) 23 (iii) 26 (iv) 40

3.निम्नांकित में से 15 किसका अपवर्तक है:

(i) 3125 (ii) 122940 (iii) 151290

4.5904 और 4848 का म0स0 ज्ञात कीजिए।

5.चार छात्र एक मैदान के चारों ओर दौड़ लगाते हैं। वे क्रमशः 30 सेकेण्ड, 40 सेकेण्ड,50 सेकेण्ड और 60 सेकेण्ड में मैदान का पूरा चक्कर लगाते हैं। यदि वे मैदान के किसी बिन्दु से एक साथ दौड़ना प्रारम्भ करें तो बताइए कि कम से कम कितने समय पश्चात् वे उसी बिन्दु पर पुनः मिलेंगे।

6.दो संख्याओं का म0स0 35 और उनका ल0स0525 है। उनमें एक संख्या 175 है तो दूसरी संख्या निम्नांकित में से कौन-सी होगी

(i) 25 (ii) 49 (iii) 63 (iv) 105

7.दो टंकियों में क्रमशः 72 ली तथा 116 ली दूध भरा है। बड़ी से बड़ी धारिता का बरतन बताइए जिससे दोनों टंकियों के दूध को पूरा-पूरा नापा जा सके।

8.एक कमरे का फर्श 300 सेमी × 425 सेमी नाप का है। उसमें बड़ी से बड़ी किस नाप की वर्गाकार टाइल लगाई जा सकती हैं ताकि टाइलों की संख्या कम से कम रहे?

9.तीन हौंजों में क्रमशः 330, 375 और 450 लीटर पानी भरा है। बड़े से बड़े पीपे की धारिता बताइए जिससे इन हौंजों के पानी को पूरी-पूरी बार में निकाला जा सके।

10.वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 804 तथा 1745 को भाग देने पर क्रमशः5 तथा 6 शेष बचे।

(संकेत : 804—5=799 और 1745- 6= 1739 का म0स0 ही अभीष्ट संख्या होगी।)

11. वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे590, 908 तथा 1014 को भाग देने पर प्रत्येक दशा में समान शेष बचे।

(संकेत : 908 -590= 318 और 1014 - 908= 106 का म0स0 ही अभीष्ट संख्या होगी।)

12.उत्तर का सही विकल्प छाँटिए

(क) तीन संख्याएँ 1 : 2 : 3 के अनुपात में हैं। यदि उनका म0स0 12 है तो ये संख्याएँ हैं?

(i) 12, 24, 36 (ii) 10, 20, 30 (iii)5, 10, 15 (iv) 4, 8, 12

(ख) तीन लकड़ी के लट्ठे क्रमशः 36 मी, 45 मी तथा 63 मी लम्बे हैं। इन्हें बराबर लम्बाई के छोटे-छोटे गुटकों में बाँटना है। प्रत्येक गुटके की अधिकतम लम्बाई है?

(i) 9 मी (ii) 18 मी (iii)51 मी (iv) 4.5 मी

(ग) नापने की तीन छड़ें क्रमशः 64 सेमी, 80 सेमी तथा 96 सेमी लम्बी हैं। इनमें से कोई भी छड़ प्रयोग करके कम से कम किस लम्बाई का कपड़ा पूर्ण रूप से नापा जा सकता है।

(i) 0.96 मी (ii) 19.20 मी (iii) 9.60 मी (iv) 96 मी

13. तीन विभिन्न चौराहों पर यातायात की बत्तियाँ क्रमशः 48 सेकेण्ड, 72 सेकेण्ड और 108 सेकेण्ड के बाद बदलती हैं। यदि वे 8 बजकर 20 मिनट पर एक साथ बदलें तो पुनः एक साथ कब बदलेंगी

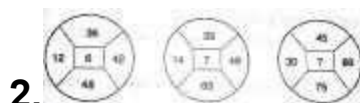
14. एक आयत का क्षेत्रफल56 वर्ग सेमी है। पूर्णांकों में उसकी लम्बाई और चौड़ाई क्या-क्या हो सकती है

विशेष प्रश्न

1. नारियल के एक ढेर को 2, 3 और 5 के समूह में विभक्त किया गया है, प्रत्येक दशा में एक नारियल बच जाता है, ढेर में लघुतम नारियल की संख्या है :

(i) 31 (ii) 41 (iii) 51 (iv) 61 उ. 31 (एन.टी.एस. 2006)

निर्देष : प्रश्न में संख्याएँ एक विशेष नियम से चित्रों में दी गई हैं। एक संख्या का स्थान रिक्त है जिसे (?) से दर्शाया गया है। रिक्त स्थान के लिए दिये गये पाँच विकल्पों में से सही विकल्प लिखिए

2.

(i) 12 (ii) 15 (iii) 18 (iv) 21 (v) 24 G.15

3.

(i) 8 (ii) 10 (iii) 21 (iv) 120 (v) 100 G.120

इस इकाई से हमने सीखा

1.*गुणनखंड* (*अपवर्तक*) *और गुणज* (*अपवर्त्य*) *की पहचान वैâसे कर सकते हैं* ?

(i) *किसी संख्या का अपवर्तक उस संख्या का पूर्ण विभाजक होता है* ।

(ii) *प्रत्येक संख्या स्वयं का एक अपवर्तक होती है* ।

(iii) 1 *प्रत्येक संख्या का अपवर्तक होता है* ।

(iv) *किसी संख्या का प्रत्येक अपवर्तक उस संख्या से छोटा या उसके बराबर होता है* ।

(v) *प्रत्येक संख्या अपने प्रत्येक अपवर्तक का एक गुणज होती है* ।

(vi) *किसी संख्या का प्रत्येक गुणज उस संख्या से बड़ा या उसके बराबर होता है* ।

(vii) *प्रत्येक संख्या स्वयं का एक गुणज है* ।

2. *भाज्य-अभाज्य संख्याओं की पहचान कैसे करें* ?

(i) *वह संख्या जिसके दो ही अपवर्तक* 1 *और स्वयं संख्या ही होते हैं, अभाज्य संख्या कहलाती है*। *जिन संख्याओं के दो से अधिक अपवर्तक होते हैं, वे संख्याएँ भाज्य संख्याएँ कहलाती हैं* ।

(ii) *दो संख्याएँ जिनका सार्व अपवर्तक केवल* 1 *हो, सह-अभाज्य संख्याएं कहलाती हैं* ।

(iii) *यदि एक संख्या दूसरी संख्या से विभाज्य है तो वह दूसरी संख्या के प्रत्येक अपवर्तक से भी विभाजित होगी* ।

(iv) *वह संख्या जो दो सह-अभाज्यों से विभाजित होती है, उनके गुणनफल से भी विभाज्य होगी* ।

3. (i) *दो या अधिक संख्याओं का म*0*स*0 (HCF) *उनके सार्व अपवर्तकों में से सबसे बड़ा होता है*।

(ii) *दो या दो से अधिक संख्याओं का म.स. या तो सबसे छोटी संख्या के बराबर होता है अथवा सभी संख्याओं से छोटा होता है*।

(ii) *दो या अधिक संख्याओं का ल*0*स*0 (LCM) *उनके सार्व गुणजों में से सबसे छोटा होता है*।

(iv) *दो या दो से अधिक संख्याओं का ल*0*स*0 *उनमें से किसी से भी छोटा नहीं हो*

सकता। वह उनमें से सबसे बड़ी संख्या के बराबर हो सकता है।

(v) *किन्हीं सह-अभाज्य संख्याओं अथवा अभाज्य संख्याओं का ल*0*स*0 *उन संख्याओं के गुणनफल के बराबर होता है।*

(vi) *दो संख्याओं की स्थिति में म*0*स*0 × *ल*0*स*0= *प्रथम संख्या* × *द्वितीय संख्या।*

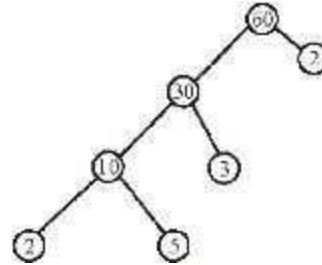
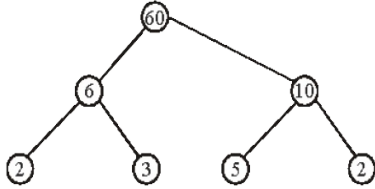
उत्तरमाला

***अभ्यास* 10 (a)**

1. (1) *ग*, (2) *ङ*, (3) *घ*, (4) *क*, (5) *ख*, 2. (*क*) 3, 6, 9, 12, 15 (*ख*) 4, 8, 12, 16, 20 (*ग*)5, 10, 15, 20, 25 (*घ*) 9, 18, 27, 36, 45 3. (1) (*घ*), (2) (*ङ*), (3) (*ख*), (4) (*ग*), (5) (*क*) 4.7, 14, 21, 28, 35, 42, 49,56, 63, 70, 77, 84, 91, 98;5. 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496.

(*सभी गुणनखण्डों का योग* 992 (*अर्थात* 2 ^{2} 496= 992) *संख्या का दुगना है इसलिए यह एक सम्पूर्ण संख्या है।*

***अभ्यास* 10 (b)**

1. 3 X 3; 2. 12; 3. 2 X 2 X 2 X 3;
4.

5. 9999; *अभाज्य गुणनखण्ड* 3 X 3 X 11 X 101; 6. 10000; 2 × 2 × 2 × 2 × 5× 5× 5 × 5; **7**. 2× 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 3× 3; **8**. 2 × 2× 2 × 2 × 7; 2 × 2 × 2× 3 × 5; 3× 3× 3× 5; 2× 2× 5 × 7; 2× 3× 5 × 5; 2× 2× 307; 9. (iv)

***अभ्यास* 10 (c)**

1. (i) 18, (ii) 225, (iii) 13, (iv) 12, (v) 101,
(vi) 625; 2. (i) 13, (ii) 55, (iii) 58,(iv) 747,
3. 31; 4. 8, 5. (i) $\frac{64}{361}$, (ii) $\frac{11}{18}$, (iii) $\frac{11}{25}$.

***अभ्यास* 10 (d)**

1. 42; 2. (*क*) 45, (*ख*) 30, 60, (*ग*) 72, (*घ*) 77; 3. 12, 24, 36, 48, 60;

4. (*क*) 30, (*ख*) 704, (*ग*) 910, (*ग*) 4598 (*ङ*) 280; 5. 200; 6. 897; 7. 10803; 8. 427; 9. 3447.

अभ्यास 10 (e)

1. 6; 2. (*क*) 14× 21 = 7 × 42, (*ख*) 25 × 65 = 5 × 325, (*ग*) 32 ×96 = 32 ×96, (*ग*) 81×135=27×405, (*घ*) 15 × 125 = 5 X 375 **4**00; 4. *नही*, *क्योकिं* 14 से 204 *पूर्णत विभाज्य नही हैं*; 5.*म.स.* 201, *ल.स.* 55275; 6. 105 *बार*; 7. 1122

अभ्यास 10 (f)

1. 105; 2. 7; 3. 30; 4. 60; 5. 10; 6. 3000 दिन; 7. 5 *मी*; 8. 15 *बार*; 9. 37 *आम*; 10. 9 *मी*; 11. 23 *जनवरी*

दक्षता अभ्यास 10

1. (i) *असत्य*, (ii) *असत्य*, (iii) *सत्य*, (iv) *सत्य*, (v) *असत्य*, (vi) *सत्य*, (13, 26, 39, 52, 65; (ii) 23, 46, 69, 92, 115; (iii) 26, 52, 78, 104, 130; (iv) 40, 80, 120, 160, 200; 3. (ii) 122940, (iii) 151290; 4. 48; 5. 600*सेकण्ड* ; 10 *मिनट*; 6. (iv) 105; 7. 4 *लीटर*; 8. 25 *सेमी* × 25 *सेमी*; 9. 15 *लीटर*; 10. 47; 11. 106; 12. (*क*) (i) 12, 24, 36; (*ख*) (i) 9*मी*, (*ग*) (iii) 9.60 *मी*; 13. 8 *बजकर* 27 *मिनट* 12 *सेकण्ड*; 14. 1 *सेमी* × 56 *सेमी*, 2 *सेमी* × 28 *सेमी*, 4 *सेमी* × 14 *सेमी*, 7 *सेमी* × 8 *सेमी*

इकाई:11समीकरण(एक चर मे)

- गणितीय कथन का अर्थ स्पष्ट करना
- रेखीय समीकरण एक चर में (त्रुटि एवं प्रयत्न विधि से)
- समीकरण हल करने की उपर्युक्त विधि
- दैनिक जीवन परआधारित रेखीय समीकरण के वर्तिक प्रश्न
- समीकरण को हल करने की पक्षान्तर विधि

11.1 भूमिका

पिछले अध्याय में हम बीजीय व्यंजक, व्यंजक के पद, समान और असमान पदों की पहचान तथा समान पदों को परस्पर जोड़ने की विधा से अवगत हो चुके हैं। इसके साथ ही शब्दों और वाक्यों में वर्णित व्यावहारिक जीवन से सम्बन्धित साधारण भाषा वाले गणितीय कथनों को किसी चर के माध्यम से व्यंजक के रूप में लिखने की कला से भलीभांति अवगत हो चुके हैं। आइए हम साधारण भाषा वाले गणितीय कथन को चर वाले व्यंजक के रूप में बदलने को एक उदाहरण के द्वारा समझें।

राकेश ने अप्पू से कहा, मेरे पास जितने फूल हैं उसका 4 गुना करके 5 जोड़ने पर कुल फूलों की संख्या 45 हो जाती है। इसे बीजीय व्यंजक के रूप में लिखिए।

इस कथन को लिखने के लिए अप्पू सोचता है, चूंकि राकेश के पास फूलों की संख्या ज्ञात नहीं है इसलिए वह मान लेता है कि राकेश के पास x फूल हैं। फूलों की संख्या का 4 गुना = 4x कर पुन: 5 जोड़ने पर, फूलों की संख्या = 4x+ 5; यह एक बीजीय व्यंजक है जो अक्षर संख्या एवं अंक संख्याओं तथा मूल संक्रियाओं से मिलकर बना

है। अतः कथन के अनुसार 4x+ 5 = 45, जो एक चर वाला रेखीय समीकरण है। इस इकाई में हम रेखीय समीकरण का अध्ययन करेंगे।

11.2. गणितीय कथन का अर्थ

हम अपने दैनिक जीवन के वार्तालाप में कई प्रकार के वाक्य बोलते हैं। इनमें से कुछ निम्नलिखित वाक्यों को पढ़िए :

1.आज रात में वर्षा होगी।

2. आज के मैच में भारत जीतेगा।

3. दिल्ली, भारत की राजधानी है।

4.संख्या 6 संख्या 10 से बड़ी है।

5. पाँच तीन से छोटा है।

इन वाक्यों में से प्रथम व द्वितीय वाक्य के सत्य अथवा असत्य होने की बात निश्चित रूप से नहीं कहीं जा सकती हैं, जबकि वाक्य 3,4 और 5 का सत्य या असत्य होना सुनिश्चित है।

ऐसे वाक्य जिनका सत्य या असत्य होना सुनिश्चित हो, कथन कहलाता है।

आइए अब हम कुछ अन्य कथनों पर विचार करते हैं जो मूलभूत संक्रियाओं पर आधारित हैं:

कथन :

(1) $6+5 = 11$.............(सत्य)
(2) $6 > 4$ ....(सत्य)
(3) $3 < 2$..................(असत्य)

(4) $x + 2 = 3$..... ..... (*सत्यता x के मान पर निर्भर*)

(5) $2x < 7$...............(*सत्यता x के मान पर निर्भर*)

(6) $x^2 = 9$................(*सत्यता x के मान पर निर्भर*)

हमने देखा कि इसमें से कथन (1), (2), (3) *ऐसे कथनहैं, जिसमें अक्षर संख्या नहीं है। ये कथन सर्वथा सत्य अथवा असत्य कथन कहलाते है।*

कथन (4), (5), (6) *सर्वथा सत्य अथवा असत्य कथन नहीहैं। इन कथनों की सत्यता* x *के मान पर निर्भर करतीहै।*

उदाहरणार्थ, $x + 2 = 3$, x *के मान* 1 *के लिए ही सत्यहै। शेष सभी मानों के लिए असत्यहै।*

पुन: कथन (1), (4), (6) *पर विचार कीजिए:*

$6 + 5 = 11$ ....(1)

$x + 2 = 3$............... (4)

$x^2 = 9$ ....(6)

इन सभी कथनों में समानता सूचक चिह्न `=' *का प्रयोग किया गयाहै। अत: ये सभी कथन समानता सूचक कथन कहलाते हैं। कथन* (4) *और* (6) *की सत्यता* x *के मान पर निर्भर करतीहै*

11.3. ***समीकरण क्या है?***

आपने बीजीय व्यंजक तथा एक चर की अवधारणा के अन्तर्गत तीलियो द्वारा V *और* N *के विभिन्न प्रतिरूपों को बनाकर उसमें प्रयुक्त होने वाली तीलियों की संख्या जानने के लिए, एक नियम ज्ञात किया था।*

ध्यान दें, V *का एक प्रतिरूप बनाने में आवश्यक तीलियों की संख्या* = 2 *किन्तु* V *के* n *प्रतिरूपों की संख्याहै और* n *का मान* 1,2,3,4.............*हो सकताहै।*

इसी प्रकार हम देखते हैं कि एक N *बनाने में तीलियों की संख्या* 3 *है। इसलिए* N *के* n *प्रतिरूपों को बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या* = 3 n, *जहाँ* n *के मान* 1,2,3,4.......................*हो सकते हैं।*

यहाँ हम देखतेहैं कि तीलियों की संख्या n *के मान के साथ बदलती जाती है, इसलिए*

n *को चर* (variable) *कहते हैं। चर को दर्शाने के लिए* l, m, n, p, q, r, x,y,z *आदि अक्षरों का प्रयोग करते हैं।*

प्रयास कीजिए

तीलियों की सहायता से M *के प्रतिरूप बनाइए और इनके विभिन्न प्रतिरूपों के लिए आवश्यक तीलियों को ज्ञात करने के लिए नियम लिखिए।*

उपर्युक्त में यदि आपको 10 *तीलियाँ दी गई हों तो* V *के कितने प्रतिरूप बना सकते हैं।*

हम देख चुके हैं कि, V *के लिए आवश्यक तीलियों की सं*0 = 2n *जहाँ* n , V *के प्रतिरूपों की संख्या है।*

2 n = 10........................(1)

यहाँ हम एक प्रतिबन्ध प्राप्त करते हैं; जो चर 2 *द्वारा संतुष्ट हो रहाहै। हम इसे निम्नांकित सारणी से जाँच सकते हैं।*

बनाये गये v की संख्या	1	2	3	4	5	6	7	...
आवश्यक तीलियों की संख्या	2	4	6	8	10	12	14	.....

विलोमत: यदि आपको तीलियों की संख्या दी गईहै तो V *प्रतिरूपों की संख्या ज्ञात कर सकते हैं।*

यदि आपको 10 *तीलियाँ दी हुई हों तो आप* V *के कितने प्रतिरूप बना सकते हैं* ?

इस स्थिति में 2 n= 10, *यह एक ऐसा प्रतिबन्धहै जो चर* n *द्वारा संतुष्ट होना चहिए।*

n का मान	2nका मान	प्रतिबन्ध संतुष्टहै हाँ/नहीं
1	2	नहीं
2	4	नहीं
3	6	नहीं
4	8	नहीं
5	10	नहीं
6	12	नहीं

हम पाते हैं कि केवल n =5 *के लिए उपर्युक्त प्रतिबन्ध* 2 n = 10 *संतुष्ट होताहै,* 5 *के अतिरिक्त अन्य किसी मान के लिए नहीं।*

निष्कर्ष

एक समीकरण समता सूचक चिह्न युक्त बीजीय व्यंजक पर एक प्रतिबन्ध है, जिसमें चर के किसी विशिष्ट मान के लिए व्यंजक (समिका) के दोनों पक्षों का मान समान होताहै। चर का यह विशिष्ट मान समीकरण का हल कहलाताहै।

एक संतुलित समीकरण एक तराजू की तरह होताहै जिसके बायें पलड़े में बाट रखते

हैं और दाये पलड़े में तौली जाने वाली वस्तु रखी जातीहै।

समीकरण को कथनों में बदलिए :

(i) $x + 7 = 12$ (ii) $5x = 20$ (iii) $\frac{m}{3} - 5 = 10$

समीकरण हल करना

$3x + 7 = 28$

इस समीकरण केबाँये पक्ष में x को अलग करने के लिए चरण बद्ध प्रक्रिया अपनाते हैं। यहाँबाँया पक्ष $3x + 7$ Öõ। इसमें3xको अलग करने के लिए दोनो पक्षों से 7 घटा देतेहैं जिससे समीकरण प्रत्येक दशा में संतुलित रहे। अत: दोनों पक्षों से7 घटाने पर

$3x + 7 - 7 = 28 - 7$

$3x = 21$

पुन: दोनों पक्षों में 3 से भाग देने पर

$$\frac{3x}{3} = \frac{21}{3}$$

$x = 7$ समीकरण का हल है।

समीकरण बनाना

शैली ने भाई विशाल को कुछ रुपये दिये तथा उसकी माँने भी विशाल को ` 5 दिये। अब उसके पास ` 50 हो गये। शैली ने विकास को कितने रुपये दिये ?

माना शैली ने विशाल को x दिये तथा

माँ ने विशाल को ` 5 दिये। अब विशाल के पास ` 50 हो गये।

अत: $x + 5 = 50$

$x = 50 - 5 = 45$

निम्नलिखित गणितीय कथन को बीजीय व्यंजक के रूप में लिखिए। जाँच कीजिए कि यह समीकरण है या नहीं।

(1) यदि किसी संख्या के 6 गुने से आप 8 घटाएँ तो 10 प्राप्त होताहै।

(2) *किसी संख्या के* 4 *गुने में पाँच जोड़ा जाय तो* 21 *प्राप्त होताहै।*

(1)$6x$-8=10

(2) $4x$+ 5 = 21

जाँचः$6x$-8 = 10

x का मान	बाँया पक्ष	दाँया पक्ष
1	6×1-8=-2	10
2	6×2-8=4	10
3	6×3-8=10	10

गणितीय कथन 1 ***का बीजीय व्यंजक रूप***6x - 8 = 10 ***है, यह एक समीकरणहै जिसका हल*** x =3***है।***

जांच : $4x$ + 5 = 21

x का मान	बाँया पक्ष	दाँया पक्ष
1	4×1+5=9	21
2	4×2+5=13	21
3	4×3+5=17	21
4	4×4+5=21	21

गणितीय कथन 2 ***का बीजीय व्यंजक रूप*** $4x$ + 5 = 21***है , यह एक समीकरणहै जिसका हल*** x=4 ***है।***

ध्यान दीजिए

समीकरण का समता सूचक चिह्न यह दर्शाताहै कि समीकरण के चर के विशिष्ट मान के लिए इस समता चिह्न के बायीं ओर के व्यंजक (***बायां पक्ष*** LHS) ***का मान और चिह्न के दायीं ओर के व्यंजक*** (***दायाँपक्ष*** RHS) ***का मान परस्पर बराबरहैं। यदि बाँया पक्ष और दाँया पक्ष के बीच में समता चिह्न के आतिरिक्त कोई अन्य चिह्न हो, तो वह एक समीकरण नहीं है।***

$6x$ - 8 > 10 ***समीकरण नहीं है***

$6x$ - 8 < 10 ***समीकरण नहीं है***

$6x$ - 8 = 10 ***समीकरण है***

उपर्युक्त समीकरण में दाँया पक्ष संख्यात्मक है जो एक आंकिक (***अंकगणितीय***)

व्यंजकहै। परन्तु सदैव ऐसा होना आवश्यक नहींहै। दाँया पक्ष (RHS) *चर से युक्त एक व्यंजक भी हो सकता है।*

किसी समीकरण में बायें और दायें पक्षों में से कम से कम किसी एक पक्ष को चर से युक्त व्यंजक अवश्य होना चहिए अन्यथा यह समीकरण नहींहोगा, आपितु यह अंकगणितीय समिका होगी।

जब किसी समीकरण में उपस्थित चर की आधिकतम घात एक होती है तो ऐसे समीकरण को रेखीय समीकरण कहते हैं।

$6x - 8 = 10$,*और* $4x + 5 = 20$ *रेखीय समीकरण है।*

निम्नांकित को गणितीय कथन के रूप में लिखिए और रेखीय समीकरण छांटिए:

1. $11 + 12 = 23$

2. $x + 4 = 6$

3. 10 þ 3 = 30

4. $2x + 5 = x - 7$

प्रयास कीजिए

निम्नांकित समीकरणों से बाँया पक्ष तथा दाँया पक्ष अलग-अलग छाँटिए:

1. $x + 12 = 13$
2. $3x + 5 = 17$
3. $10x = 30$
4. $2x + 5 = x + 7$
5. $x = 14 - 2x$

समीकरण का हल :

निम्नांकित समीकरण पर विचार कीजिए :

$8 + x = 13$

यह समीकरण यह व्यक्त करताहै कि 8 *में* x *जोड़ने पर योग फल* 13 *प्राप्त होताहै। स्पष्टहै कि यहाँ* x *का मान* 5*है,क्योंकि* 8 *में* 5 *जोड़ने पर योग फल* 13 *प्राप्त होता है। इसे हम इस प्रकार भी कह सकते हैं कि* x *के स्थान पर* 5 *प्रतिस्थपित करने से बाएँ*

पक्ष का मान दाएँ पक्ष के बराबर होता है अर्थात समीकरण सन्तुष्ट हो जाता है।
अत: $x = 5$ समीकरण का हल है तथा 5 को समीकरण का मूल भी कहते हैं।
वह संख्या जो चर के स्थान पर प्रतिस्थपित करने पर समीकरण को सन्तुष्ट कर देती है, उस समीकरण का हल कहलाती है।

प्रयास कीजिए

1. $x + 1 = 2$

2. $x + 7 = 5$

3. $x + 2 = 2$

11.4 रेखीय समीकरण को त्रुटि एवं प्रयत्न विधि से हल करना

उदाहरण **1 :** $x + 6 = 9$

इस समीकरण को हल करने अर्थात x का मान ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित तलिकानुसार x के विभिन्न मान का प्रतिस्थापन कीजिए :

समीकरण $x + 6 = 9$

x के मान	बाँया पक्ष (x + 6)का मान	दाँया पक्ष का दिया हुआ मान
0	0+6=6	9
1	1+6=7	9
2	2+6=8	9
3	3+6=9	9

हम देखतें हैं कि x के विभिन्न मानों में से केवल 3 ऐसा मानहै जो समीकरण को सन्तुष्ट करताहै।

अर्थात $x = 3$ समीकरण का हल है।

उदाहरण 2: समीकरण $x + 7 = 3$ को हल कीजिए।

समीकरण $x + 7 = 3$

x के विभिन्न मान	बाँया पक्ष (x + 6)का मान	दाँया पक्ष का दिया हुआ मान
0	0+7=7	3
1	1+7=8	3
2	2+7=9	3
-1	-1+7=6	3
-2	-2+7=4	3
-3	-3+7=4	3
-4	-4+7=3	3

हम देखते हैं x का धनात्मक मान रखने पर बाएँ पक्ष का मान दाहिने पक्ष से क्रमश: बüढ रहा है। अत: x के ऋणात्मक मान रखने पर $x = -4$ के लिए समीकरण सन्तुष्ट होता है।

अत: $x = -4$ *समीकरण का हल है*।

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित समीकरणों को त्रुटि एवं प्रयत्न विधि (*तालिका विधि*) *द्वारा हल कीजिये* :

(1) $x + 2 = 5$ (2) $3 = + 2$

(3) $x+ 8 = 5$

रेखीय समीकरण हल करने की उपयुक्त विधि

हम लोगों ने तराजू पर सामान तौलते देखाहै। *तराजू पर रखी हुई किसी वस्तु के भार* (*अज्ञात मान*) *को दूसरे पलड़े पर बाट* (*ज्ञात मान*) *रखकर मालूम करते हैं*। *डंडी का क्षैतिज होना दोनों पलड़ो पर समान भार होना दर्शाता है*।

अज्ञात मान (*वस्तु*) = *ज्ञात मान* (*बाट*)

समीकरण समझने के लिए एक उदाहरण लेते हैं।

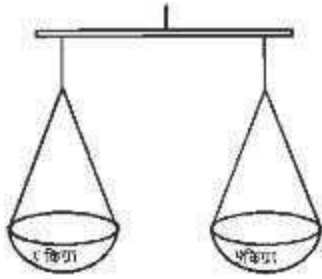
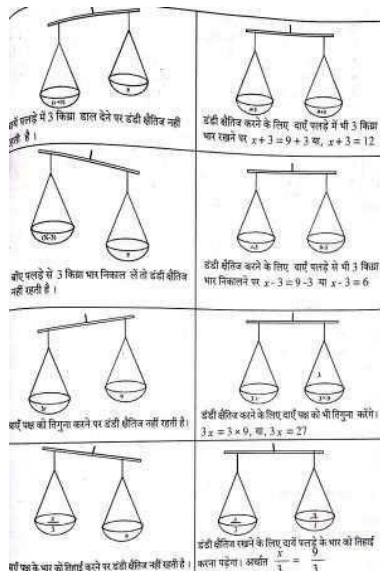
एक फल की दुकान पर दीपिका ने दुकानदार से 3*क्रिग्रा आम देने को कहा*, *दुकानदार ने तराजू के दायें पलड़े पर* 3 *किग्रा का बांट रखा और बायें पलड़े पर कुछ आम रख दिये*। *तराजू की डंडी बाट की ओर झुकी थी तो दुकानदार ने एक आम और बायें पलड़े पर रख दिया*। *तराजू की डंडी क्षैतिज हो गई और दोनों पलड़े सन्तुलन में बराबर हो गये*। *तभी उसकी बहन सरिका वहाँ पहुँची और सरिका ने दुकानदार से कहा कि इन्हीं*è *आमों के साथ* 2 *किग्रा आम और तौल दीजिए*। *दुकानदार ने* 2 *किग्रा का बाट दायें पलड़े में रखा तो यह पल ड़ा नीचे झुक गया*। *दुकानदार ने बायें पलड़े में आम रखना शुरू किया तो बायाँ पल ड़ा भी नीचे झुकने लगा तथा बाट वाला पल ड़ा ऊपर उठता गया*। *दुकानदार कुछ बड़े और कुछ छोटे आकार के आम अदल-बदल कर तब तक रखता रहा जब तक कि डंडी फिर से क्षैतिज स्थिति में नहीं हो गई*। *दुकानदार ने कहा यह लीजिये* 5 *किग्रा आम हैं*।

क्रिया-कलाप :

समीकरण की तुलना हम तराजू से कर सकते हैं। तराजू के दोनो पलड़े समीकरण के दोनों पक्षों को प्रकट करते हैं एवं क्षैतिज होना पक्षों का बराबर होना प्रकट करता है।

यदि हम दोनों पलड़ों पर बराबर बाट रखें, तो डंडी क्षैतिज रहती है। यदि इसी प्रकार दोनो पलड़ों से बराबर भार के बाट निकाल लें, तो भी डंडी क्षैतिज रहती है।

हम यह सिद्धान्त एक समीकरण को हल करने में प्रयोग करते हैं। संख्याओं को बाटों की तरह संतुलित करने के लिए प्रयोग किया जा सकताहै, आइए कुछ उदाहरण लेते हैं।

माना तराजू के एक पलड़े पर x ***किग्रा की एक वस्तु रखने तथा दूसरे पलड़े पर*** 9 ***किग्रा का बाट रखने पर चित्रानुसार तराजू की डंडी छैतिज रहती है।***

हम देख रहेहैं कि डंडी क्षैतिजहैं अर्थात दोनों पलड़ों पर रखी हुई वस्तुओं के भार (मान) बराबर हैं।

***उपर्युक्त** चारों **क्रियाकलापों** से निम्नांकित चार **तथ्य** उभर **कर** आते हैं :*

प्रत्येक दशा में डंडी क्षैतिज बनी रहती है, यदि :

- ***दोनो पलड़ों पर बराबर भार रख दिया जाए।***
- ***दोनों पलड़ों से बराबर भार हटा दिया जाए।***
- ***दोनों पलड़ों के भारों को दुगुना, तिगुना......आदि कर दिया जाय।***
- ***दोनों पलड़ों के भारों को आधा, तिहाई...........आदि कर दिया जाय।***

निष्कर्ष :

समीकरण के दोनों पक्षों में किसी भी समान संख्या के जोड़ने, घटाने, गुणा करने या शून्येतर समान संख्या से भाग देने से समीकरण अपरिवर्तित रहता है।

ये सभी स्वयं सिद्धियाँ(Axioms) कहलाती हैं। इनका उपयोग समीकरण के हल करने

में करते हैं।

उदाहरण 3: समीकरण $x + 7 = 15$ **को हल कीजिए।**

हल: $x + 7 = 15$

या, $x + 7 - 7 = 15 - 7$ ... **हल करने के लिए बाएँ पक्ष में केवल** x **चाहिए। अतः** (+7) **हटाने के लिए** (+7) **घटाएँगे।**

या, $x = 8$

उत्तर की जांच : **बायाँपक्ष** = x+ 7 = 8 + 7 = 15 = **दायाँपक्ष**

उदाहरण 4: समीकरण $x - 9 = 11$ **को हल कीजिए।**

हल : $x - 9 = 11$

या, $x - 9 + 9 = 11 + 9$...(**दोनों पक्षों में** 9 **जोड़ने पर**)

या, $x = 20$

उत्तर की जांच स्वयं कीजिए।

उदाहरण 5 : **समीकरण** $3n + 4 = 25$ **को हल कीजिए।**

हल : $3n + 4 = 25$

$3 \frac{3n}{3} + 4 - 4 = 25 - 4$ (**दोनों पक्षों से** 4 **घटाने पर**)

$3n = 21$

$n = 7$

उत्तर की जांच स्वयं कीजिए।

उदाहरण 6: समीकरण $\frac{n}{3} = 20$ **को हल कीजिए**

(**दोनों पक्षों में** 5 **से भाग देने पर**)

हल : $\frac{n}{3} = 20$ **या,** $\frac{n}{3} \times 3 = 20 \times 3$.... (**दोनों पक्षों में** 3 **से गुणा करने पर**)

n= 60 (**सरल करने पर**)

उत्तर की स्वंय जांच कीजिए।

उदाहरण 7: समीकरण 5p=15 ***को हल कीजिए।***

हल: 5p=15

या, $\frac{5p}{5} = \frac{15}{5}$ ..... (***दोनों पक्षों में*** 5 ***से भाग देने पर***)

$p = 3$

उत्तर की स्वयं जांच कीजिए।

उदाहरण 8 : $3a + 5 = 17$ ***को हल कीजिए।***

हल : $3a + 5 = 17$

$3a + 5 - 5 = 17 - 5$ (***दोनों पक्षों में*** 5 ***का घटाने पर***)

या, 3a=12

या, $a = \frac{12}{3}$ (***दोनों पक्षों में*** 5 ***का घटाने पर***)

या, $a = 4$

उत्तर की जांच स्वयं कीजिए।

उदाहरण 9 : समीकरण $\frac{x}{2} - 1 = 2$ ***को हल कीजिए***

हल : $\frac{x}{2} - 1 = 2$

या, $\frac{x}{2} - 1 + 1 = 2 + 1$ (***दोनों पक्षों में*** 1 ***जोड़ने पर***)

या, $\frac{x}{2} = 3$

या, $\frac{x \times 2}{2} = 3 \times 2$ (***दोनों पक्षों में*** 2 ***का गुणा करने पर***)

x=6

उत्तर की स्वयं जाँच कीजिए।

उदाहरण 10: समीकरण $7 + 5x - 3x = 15 + 3x - 3x$ ***को हल कीजिए।***

हल : $7 + 5x - 3x = 15 + 3x - 3x$ (***चर किसी भी पक्ष में हो सकताहै। हल करने की दृष्टि से चर***

बाएँपक्ष में रख लेतेहैं।)

या, $7+2x=15$ (दोनों पक्षों से3xको घटाने पर)

या, x

या, $7+2x-7=15-7$ (दोनो पक्षों से 7 घटाने पर)

2x = 8

$\frac{2x}{2}=\frac{8}{2}$ (दोनो पक्षों में 2 का भाग देने पर)

x=4

उत्तर की जांच : बायाँपक्ष = 7+5x=7+5×4=27

दायाँपक्ष = 15 + 3 x = 15 + 3 þ 4 = 27

अत: बायाँपक्ष = दायाँपक्ष

अभ्यास 11 (a)

निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए एवं अपने उत्तर की जाँच कीजिए:

1. (a) x +2 = 3 (b) 3+x=4 (c) 15=a+12

2. (a) 11=b-3 (b) y-6= 0 (c) 3+g=3

3. (a) 5g=10 (b) 3x=12 (c) 33=11x

4 . (a) x/3= 2 (b) 7x/15=0 (c) y/5=1

5.

(a) $2x-3=5$ (b) $3+4x=x+9$

(c) $\frac{y}{7}+1=2$ (d) $3=10-\frac{z}{2}$

(e) $\frac{5y}{3}+1=6$ (f) $1.2x+3=4.2$

(g) $\frac{2}{3}x-2=0$ (h) $\frac{2x-3}{5}=7$

11.6 दैनिक जीवन पर आधारित रेखीय समीकरण सम्बन्धी वर्तिक प्रश्न

11.6.1 रेखीय समीकरण सम्बन्धी वार्तिक प्रश्न पढ़कर समीकरण बनाना

हमारे गाँव में एक लड़का है। उसका नाम सुनीलहै। उसके पास एक थैलीहै,

उसमें कुछ अमरूद हैं। फरीद ने सुनील के थैले में 10 अमरूद और डाल दिए। इस प्रकार सुनील के थैले में 22 अमरूद हो गये। इस कथन को हम समीकरण की भाषा में अत्यन्त संक्षिप्त रूप से लिख सकतेहैं।

मान लीजिए

सुनील के थैले में अमरूदों की संख्या = x .... (1)

फरीद द्वारा दिए गये अमरूदों की संख्या = 10 ....(2)

अब सुनील के थैले में कुल अमरूद = x + 10.......(3)

प्रश्न के अंतिम वाक्य के अनुसार थैले में

अमरूदों की संख्या = 22 ....(4)

x + 10 = 22कथन (3) और (4) समान हैं।

अत: हम लिख सकते हैं कि

किसी कथन को समीकरण का रूप देने के लिए :

1. प्रश्न पढकर ढूँढिऐ कि क्या ज्ञात करनाहै। इस अज्ञात मान को चर x मान लीजिए प्रश्न के कथन के अनुसार चर x में एक व्यंजक प्राप्त कीजिए।

2.प्रश्ननःपुनः पढ़िए। चर x से युक्त व्यंजक और ज्ञात रशियों में एक समानता का सम्बन्ध स्थपित कीजिए। यही समीकरण होगा।

उदाहरण 11: कक्षा 6 की दो टीमों में क्रिकेट का मैंच खेला गया। प्रथम टीम के रनों की संख्या दूसरी टीम के रनों की संख्या के दो गुने से 10 कम है। यदि दोनों टीमों ने मिलकर 110 रन बनाए हों, तो इस प्रतिबन्ध को समीकरण का रूप दीजिए।

हल : मान लीजिए कि दूसरी टीम के रनों की संख्या = x

प्रथम टीम के रनों की संख्या = $2x - 10$

दोनों टीमों के रनों का योग = 110

प्रतिबन्ध के अनुसार : $x + 2x - 10 = 110$

या $3x - 10 = 110$

आइये सोचें और निम्नलिखित कथनों पर चर्चा कर समीकरण के रूप में लिखें :

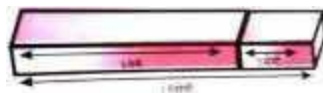
1. x और 6 का योग फल 13है।

2. एक संख्या 9 से 5 कमहै।

3. किसी संख्या का दुगना 6है।

4. x का पाँचवा भाग 3है।

11.6.2 दैनिक जीवन सम्बन्धी प्रश्नों में एक अज्ञात रशि को रेखीय समीकरण की सहायता से ज्ञात करना

उदाहरण 12: पार्श्वंकित चित्र से समीकरण बनाइए और x का मान ज्ञात कीजिए :

हल : $x + 5 = 15$

या, $x + 5 - 5 = 15 - 5$

या, $x = 10$

उदाहरण 13: 5 पुस्तकों का मूल्य 7 पुस्तकों के मूल्य से ` **14** कमहै। एक पुस्तक का मूल्य बताइये।

हल: मान लीजिए कि एक पुस्तक का मूल्य ` x है।

5 पुस्तकों का मूल्य = $5x$

7 पुस्तकों का मूल्य = $7x$

प्रश्नानुसार : $5x = 7x - 14$

या, $5x - 7x = 7x - 14 - 7x$

या, $-2x = -14$

या, $2x = 14$

अतः $x = 7$

अतः एक पुस्तक का मूल्य रुपये 7 है।

उदाहरण 14: मोहिन्दर की वर्तमान उम्र बताइए यादि वह 10 वर्ष पहले 35 वर्ष का था।

हल: मान लीजिए कि मोहिन्दर कीवर्तमान उम्र x वर्षहै।

छ उसकी 10 वर्ष पहले की उम्र (x-10) वर्ष

प्रश्नानुसार: $x - 10 = 35$

या, $x - 10 + 10 = 35 + 10$

या, $= 45$

अत: मोहिन्दर की वर्तमान उम्र 45 वर्षहै।

समीकरण को हल करने की पक्षान्तर विधि

आइए, हम कुछ और समीकरणों को हल करने का अभ्यास करें। इन समीकरणों को हल करते समय एक संख्या
(*पद*) *को पक्षान्तर* (transpose) *करने* (*अर्थात् एक पक्ष से दूसरे पक्ष में ले जाने*) *के बारे में सीखेंगे। आप किसी संख्या*
या पद को, समीकरण के दोनों पक्षों में जोड़ने या दोनों पक्षों से घटाने के स्थान पर केवल पक्षान्तर कर सकते हैं।
इसे निम्नलिखित उदाहरण द्वारा समझें।

उदाहरण **1:** *हल कीजिए*

$m-6 = 12$

हल **:** *समीकरण के दोनों पक्षों में* 6 *जोड़ने*

$m-6+6 = 12+6$

या $m = 18$

इसी क्रिया को निम्नांकित ढंग से भी कर सकते हैं :

$m-6 = 12$

$m = 12+6 = 18$

यहाँ पर – 6 *को बाँये पक्ष से दाएँ पक्ष में ले जाने पर* + 6 *कर देते हैं। इसी क्रिया को पक्षान्तर कहते हैं।*

उदाहरण २ **:** *हल कीजिए*

$p + 18 = 37$

हल **:** *पक्षान्तर करने पर*

$p = 37 - 18$

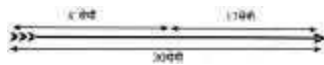
$= 19$

आपने देखा, समीकरण को हल करते समय सामान्यत: समीकरण के दोनों पक्षों में एक ही संख्या जोड़ते हैं या उसमें
एक ही संख्या घटाते हैं। किसी संख्या को पक्षान्तर करना, संख्या को दोनों पक्षों में जोड़ने या दोनों पक्षों में घटाने
जैसा ही है। ऐसा करने के लिए, उस संख्या का चिह्न बदलना पड़ता है। जो नियम संख्याओं के लिए प्रयोग किया

जाता है, वही नियम व्यंजकों के लिए भी प्रयुक्त होता है। पक्षान्तर विधि को निम्नांकित उदाहरण से भी समझें।

दोनों पक्षों में संख्या जोड़कर या घटा कर समीकरण हल करना	पक्षान्तर करके समीकरण हल करना
1. $7x - 10 = 5$ दोनों पक्षों में 10 जोड़िये $7x - 10 + 10 = 5 + 10$ $7x = 15$	1. $7x - 10 = 5$ बायें पक्ष से (- 10) को पक्षान्तर करने पर इसका चिह्न बदल जायेगा अर्थात् (-10), बदल कर +10 हो जायेगा देखिए $7x = 5 + 10$ या $7x = 15$
2. $6P + 12 = 37$ दोनों पक्षों में से 12 घटाइये $6P + 12 - 12 = 37 - 12$ या $6P = 25$	2. $6P + 12 = 37$ बायें पक्ष से (+12) को पक्षान्तर करने इसका भी चिह्न बदल जायेगा अर्थात् (+12) बदलकर (-12) हो जायेगा $6P = 37 - 12$ $6P = 25$

अभ्यास 11 (b)

1. निम्नांकित चित्र की सहायता से समीकरण बनाइये एवं x का मान ज्ञात कीजिए;

2. राम की उम्र श्याम से 5 वर्षअधिकहै, यदि राम की वर्तमान उम्र 28 वर्षहै, तो श्याम की वर्तमान उम्र
बताइए।

3. किसी संख्या में 5 जोड़ने पर 15 प्राप्त होता है, संख्या बताइए।

4.शशि ने कुछ पेन्सिलें खरीदाé। 2 पेन्सिल उसने अपनी छोटी बहन को दे दी। अब उसके पास यदि 3 पेन्सिलें
बची हों, तो उसने कुल कितनी पेन्सिलें खरीदी थाé।

5. प्रज्ञा का वजन पहले से 3 किग्रा बढकर 17 किग्रा हो जाताहै। उसका भार पहले क्या था?

6.y मीटर लम्बे फीते को 7 बराबर भागों मेंबाँटा गयाहै। यदि प्रत्येक भाग की लम्बाई 3 मीटर हो, तो y का
मान ज्ञात कीजिए।

7. किसी संख्या का आधा, उसकी चौथाई से 10 अधिक है। वह संख्या ज्ञात कीजिये |

8. एक ठेले पर 550 संतरे हैं। इन्हें दो ठेलों पर इस प्रकार बाँटिए कि उनमें से एक पर दूसरे की अपेक्षा 50 संतरे
अधिक हों।

9. निम्नांकित समीकरणों को त्रुटि एवं प्रयत्न विधि से हल कीजिए

(a) $x + 6 = 10$　　　　(b) $x + 9 = 5$

10.निम्नांकित समीकरणों को पक्षान्तर विधि से हल कीजिए।

(a) $P + 19 = 21$ (b) $n - 7 = 8$

(c) $x - 11 = 20$ (d) $7 = y + 8$

(e) $x + 5 = 0$

इस इकाई में हमने सीखा :

1. *चर वे संख्याएँ हैं, जिनके मान स्थिर या निश्चित नहीं हैं।*

2.*समीकरण, चर पर एक प्रतिबन्धहै। इसके अन्तर्गत एक चर वाला व्यंजक और एक स्थिर संख्या को बराबर लिखिते हैं। जैसे* : $x - 4 = 10$, $4x = 12$, $5 - 2x = 3$ *इत्यदि।*

3.*समीकरण मेंबाँया पक्ष और दाँया पक्ष बराबर होताहै, इन दोनों पक्षों के बीच मे समता का चिह्न* (=) *होताहै*

4.*समीकरण चर के जिस निश्चित मान के लिए संतुष्ट होताहै, वह मान समीकरण का हल कहलाता है।*

5.*रेखीय समीकरण को त्रुटि एवं प्रयत्न विधि से हल करना सिखाया गयाहै। इस विधि में, हम चर को कोई मान देकर जांच करतेहैं कि यह मान समीकरण को संतुष्ट करताहै या नहीं। समीकरण मे हम चर को ऐसे विभिन्न मान तब तक देते रहते हैं, जब तक कि समीकरण संतुष्ट न हो जाय। समीकरण जिस मान के लिए संतुष्ट होताहै, वह मान उस समीकरण का हल होताहै।*

6.*समीकरण हल करने की उपयुक्त विधि के अन्तर्गत दोनों पक्षों में उपयुक्त संख्या को जोड़कर,घटाकर,गुणाकर अथवा भाग देकर एक पक्ष में केवल चर संख्या को प्राप्त करते हैं तथा उसके सापेक्ष दूसरे पक्ष में अचर संख्या प्राप्त करते हैं। यही चर के सापेक्ष प्राप्त अचर संख्या समीकरण का हल होतीहै।*

7.*दैनिक जीवन परआधारित वर्तिक प्रश्नों को समीकरण के रूप में रूपान्तरित कर हल करना बताया गयाहै।*

उत्तरमाला

***अभ्यास* 11 (a)**

1. (a)x= 1, (b)x= 1, (c) a= 3, 2.(a)b=14, (b)y= 6, (c) g = 0 3. (a)g= 2, (b)x= 4, (c)x= 3, 4.(a)

x= 6, (b) x= 0,(c)y= 5, 5। (a)x= 4, (b) x= 2, (c) y=7, (d) z= 14, (e)y= 3, (f)y= 1, (g)x= 3, (h)

x= 19.

***अभ्यास* 11 (b)**

1. (1)= 13,(2) 23 ***वर्ष***, (3) 10, (4) 5, (5) 14 ***किग्रा***, (6) 21 ***मी***, (8) 300,250 7) 40 ; (8) 300, 250 ;

(9) (a) 4, (b) –4; (10) (a) 2, (b) 15, (c) 31, (d) – 1, (e) –5

इकाई 12 वाणिज्य गणित

- *अनुपात*
- *समानुपात*
- *प्रतिशतता*
- *लाभ-प्रतिशत, हानि-प्रतिशत*
- *साधारण ब्याज*
- *व्यवहार गणित*
- *मुद्रा की अवधारणा*
- *बिल तथा कैश मेमो*

12.1.*भूमिका* :

हमारे दैनिक जीवन में धन और व्यापार की अत्यन्त महत्वपूर्ण भूमिका होती है। अंग्रेजी में एक कहावत है - "Money makes the mare go" *अर्थात जीवन-यापन की सारी गतिविधियाँ धन पर आधारित होती हैं। आज सूचना-तंत्र का कोई भी माध्यम जैसे टेलीविजन, रेडियो, समाचार-पत्र, पत्रिकाएं आदि अर्थ और वाणिज्य के समाचारों के बिना सर्वग्राह्य और जीवन्त नहीं बन सकते। सम्पूर्ण दिवस की अर्थ और वाणिज्य जगत की गतिविधियों का पूरा लेखा-जोखा प्रस्तुत करना सूचना-तंत्र का महत्वपूर्ण कार्य है। प्रत्येक नागरिक का इनसे सीधा सम्बन्ध होता है। अतः यह आवश्यक है कि आप अभी से इन गतिविधियों से परिचित हो सकें। दैनिक जीवन की आर्थिक गतिविधियों को सुचारूढंग से चलाने के लिए आप को नित्य ही कुछ हिसाब-किताब लगाना पड़ता है, जिसके लिए कुछ महत्वपूर्ण सम्बोधों की भलीभांति जानकारी होना आवश्यक है। दैनिक जीवन की समस्याओं के समाधान के लिए इस इकाई में हम अनुपात, समानुपात, प्रतिशतता, लाभ-हानि, साधारण ब्याज और व्यवहार गणित का अध्ययन करेंगे। हम यह भी देखेंगे कि किस प्रकार अनुपात, भिन्न, दशमलव, प्रतिशत आदि को एक दूसरे में परिवर्तित करते हैं और प्रतिशतता*

का अनुप्रयोग किस प्रकाइत्यादि। क्या आप बता सकते हैं कि तुलना करने की इन दोनों विधियों में कौन कब उपयुक्त होती है? आइए हम सब मिलकर विचार-विमर्श करें। कल्पना करें कि रामू की उम्र 14 वर्ष और शालू की aउम्र 10 वर्ष है। यहाँ दोनों की उम्र में कम अन्तर है, इसलिए यहाँ पर दोनों की उम्र की तुलना अन्तर के माध्यम से करना उपयुक्त होगा और हम आसानी से कह सकते हैं कि रामू, शालू से (14 वर्ष-10वर्ष) =4 वर्ष बड़ा है या शालू रामू से 4 वर्ष छोटी है। परन्तु दो समान राशियों में बहुत अधिक अन्तर हो तो अन्तर विधि द्वारा तुलना करना उचित नहीं होता है।
कल्पना करें कि एक लड़के की उम्र 10 वर्ष है और उसके पिता की उम्र 40 वर्ष है।
लाभ-हानि की गणना करने में किया जाता है। ध्यान देने योग्य है कि व्यवहार गणित दैनिक जीवन की अनेक समस्याओं का समाधान बड़े सरल ढंग से प्रस्तुत कर देता है। क्रय-विक्रय मूल्य संबंधी बहुत-सी गणनाएँ व्यवहार गणित द्वारा शीघ्रता एवं शुद्धता से कर ली जाती हैं। गणना की इस विधा का व्यवहार कम पढ़े लिखे लोग भी कुशलतापूर्वक करते हैं। कदाचित् आम आदमी द्वारा व्यवहृत गणना की इस विधा को इसी कारण 'व्यवहार गणित' का नाम दिया गया है।

12.2. *अनुपात*

हमारे व्यावहारिक जीवन में प्रतिदिन छोटा-बड़ा, कम-अधिक, हल्का-भारी इत्यादि जैसे तुलनात्मक शब्दों से पाला पड़ता रहता है। तुलना दो प्रकार से करते हैं। पहला अन्तर के माध्यम से, जैसे कौन किससे कितना बड़ा, कौन किससे कितना अधिक, और दूसरा कौन किससे कितने गुना बड़ा,कौन किससे कितना गुना अधिकयहाँ हम दोनो के उम्र की तुलना करना चाहें तो अन्तर द्वारा तुलना करना अधिक उचित नही होगा। भाग द्वारा पिता और पुत्र की उम्र की तुलना इस प्रकार होगी $\frac{40}{10} = \frac{4}{1}$

हम कह सकते हैं कि पिता की उम्र पुत्र की उम्र की चार गुनी है।

यहाँ विशेष ध्यान देने की आवश्यकता है कि दो वस्तुओं की तुलना करते समय यदि उनमें गुणात्मक अन्तर अधिक हो तो भाग द्वारा तुलना करना अन्तर द्वारा तुलना करने से अधिक अच्छा है।

आइए हम इसे उदाहरण द्वारा समझें।

1. मान लिया कि एक ट्रैक्टर का मूल्य रू4,00,000 तथा एक मोटर साइकिल का मूल्य रू40,000 है। यदि हम इनके मूल्यों का अन्तर लें तो रू3,60,000 है और भाग द्वारा तुलना करने पर $\frac{4,0\ ,000}{40,000} = \frac{10}{1}$

यहाँ हम स्पष्टतः कह सकते हैं कि ट्रैक्टर का मूल्य मोटर साइकिल के मूल्य का दस गुना है।

ध्यान दीजिए, भाग द्वारा तुलना को अनुपात कहा जाता है।

2. मैंसे और निशा ने क्रिकेट के एक खेल में क्रमशः 56 रन और 14 रन बनाए। मैंसे ने निशा के कितने गुना रन बनाये। ?

मैंसे और निशा के रनों का अनुपात $\frac{56}{14} = \frac{4}{1}$

अतः मैंसे ने निशा द्वारा बनाये गये रनों के चार गुना रन बनाये।

निष्कर्ष :

दो समान राशियों को “कितने गुना” के रूप में व्यक्त करने को अनुपात कहते हैं। अनुपात को ‘:’ चिह्न द्वारा दर्शाया जाता है।

प्रयास कीजिए :

जब हम एक ही प्रकार की वस्तुओं की संख्याओं अथवा राशियों में भाग द्वारा तुलना करते हैं, तब हम कह सकते हैं कि हमने दो संख्याओं का अनुपात ज्ञात किया है।

अनुपात दो संख्याओं की भाग द्वारा तुलना है, जिससे यह ज्ञात होता है कि एक संख्या दूसरी संख्या की कितनी गुनी है अथवा उसका कौन सा भाग है।

यदि एक संख्या a और दूसरी संख्या b है(a, b $\neq$ 0) हो तो दोनों संख्याओं को अनुपात के रूप में वैâसे लिखेंगे|

हम जानते हैं कि दो संख्याओं में अनुपात ज्ञात करने के लिए एक संख्या में दूसरी

संख्या से भाग देते हैं। a *और* b *का अनुपात* = $\frac{a}{b}$ = a : b

a : b में a *तथा* b *को अनुपात के पद कहते हैं।*

a : b में a *प्रथम पद या पूर्वपद तथा* b *द्वितीय पद या उत्तरपद कहलाता है।*

सोचें, तर्क करें, निष्कर्ष निकालें :

सोचिए, 3 *और* 0 *तथा* 0 *और* 5 *में क्या अनुपात संभव है नहीं, क्योंकि* 3 *और* 0 *में दूसरा पद शून्य है तथा* 0 *और* 5 *में प्रथम पद शून्य है। अतः इनमें अनुपात ज्ञात करना संभव नहीं है। शून्य के साथ किसी संख्या को अनुपात के रूप में व्यक्त नहीं किया जाता है। अतः हम कह सकते हैं कि-*

दो राशियों में अनुपात ज्ञात करते समय इनमें से कोई भी राशि शून्य नहीं होनी चाहिए।

दो राशियों की तुलना तभी की जा सकती है जब वे दोनों एक ही इकाई में हों।

a : b *में* a *पूर्वपद तथा* b *उत्तरपद है। यदि* b *को पूर्वपद और* a *को उत्तरपद बना दिया जाय तो अनुपात का रूप* b : a *हो जाता है। इसे* a : b *का व्युत्क्रम कहा जाता है। जैसे* 2 : 3 *का व्युत्क्रम* 3 : 2 *और* 5 : 7 *का व्युत्क्रम* 7 : 5 *है।*

प्रयास कीजिए :

नीचे दी गई तालिका को देखकर प्रथम तथा द्वितीय स्तम्भ के चित्रों की संख्या को अनुपात तथा उसके व्युत्क्रम के रूप में लिखिए -

प्रथम स्तम्भ	द्वितीय स्तम्भ	अनुपात	व्युत्क्रम
		4 : 5	

उदाहरण 1 : 3 *और* 4 *को अनुपात में व्यक्त कीजिए :*

हल: 3: 4

उदाहरण 2: *एक कमरे की लम्बाई* 8 *मीटर और चौड़ाई* 5 *मीटर है। कमरे की लम्बाई और चौड़ाई को अनुपात के रूप में लिखिए।*

हल : *कमरे की लम्बाई और चौड़ाई में अनुपात* =8 :5

उदाहरण 3 : *दो संख्याओं में अनुपात* 5 : 3 *है। इसमें प्रथम पद और द्वितीय पद*

बताइए।

हल : प्रथम पद 5

द्वितीय पद 3

उदाहरण **4:** 4 :5 का व्युत्क्रम लिखिए।

हल : 4 :5 का व्युत्क्रम 5 : 4 है।

अभ्यास 12 (a)

1. निम्नलिखित प्रश्नों को अपनी अभ्यास पुस्तिका में लिखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) 3 का 4 से अनुपात = ☐ **(ii)** 5 का 3 से अनुपात = 5 : ☐

(iii) 2 का 7 से अनुपात = ☐ : 7 **(iv)** 4 का ☐ से अनुपात = 4 : 7

2. अनुपात में व्यक्त कीजिए :

(i) 2 का 5 से (ii) 5 का 12 से

(iii) 13 का 75 से (iv) 108 का 125 से

3. निम्नांकित तालिका को अपनी अभ्यास पुस्तिका में लिखिए और रमेश तथा सीमा के प्रत्येक विषय के प्राप्तांकों को अनुपात में लिखिए :

विषय	रमेश के अंक	सीमा के अंक	अनुपात
हिन्दी	60	53	60:53
अंग्रेजी	53	65	
गणित	75	62	
विज्ञान	48	55	
कला	63	71	

4.एक आयताकार खेत की लम्बाई 29 मी और चौड़ाई 25 मी है। खेत की लम्बाई और चौड़ाई को अनुपात के रूप में लिखिए।

5.निम्नांकित सारणी को अभ्यास पुस्तिका में लिखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

अनुपात	पूर्वपद	उत्तरपद
7:8	7	
13:21		21
73:85		

6. ***निम्नांकित अनुपातों के व्युत्क्रम लिखिए*** :

(i) 3 : 14 **(ii)** 15 : 17 **(iii)** 25 : 37 **(iv)** 65 : 67

7.प्रथमपद और द्वितीय पद बताइए :

(i) 3 : 7 **(ii)** 4 : 11 **(iii)** 13 : 27

12.2.1 ***अलग-अलग परिस्थितियों में एक जैसा अनुपात***

निम्नांकित उदाहरणों को देखें :

एक कमरे की लम्बाई 40 *मीटर और इसकी चौड़ाई* 20 *मीटर है। अतः*

कमरे की लम्बाई का चौड़ाई से अनुपात = $\frac{40}{20} = \frac{2}{1}$ = 2 : 1

*एक कक्षा में*50 *लड़के और* 25 *लड़कियाँ हैं। अतः कक्षा के*

लड़कों की संख्या का लड़कियों की संख्या से अनुपात= $\frac{50}{25} = \frac{2}{1}$ = 2 : 1

यहाँ दोनों ही उदाहरणों में एक जैसा अनुपात 2 : 1 *है।*

न्यूनतम रूप में 40 : 20 *और*50 : 25 *अनुपात समान हैं, वह* 2 : 1 *है। इन्हें तुल्य अनुपात कहते हैं।*

क्या आप कुछ और उदाहरण सोच सकते हैं जो न्यूनतम रूप में 2 : 1 *के तुल्य हों*?

ध्यान दें,

प्रथम प्रश्न में,

चौड़ाई का लम्बाई के साथ अनुपात = $\frac{20}{40} = \frac{1}{2}$ = 1 : 2

तथा दूसरे प्रश्न में लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से अनुपात $\frac{25}{50} = \frac{1}{2}$ =1 : 2

दोनों ही उदाहरणों में यहाँ भी अनुपात 1 : 2 *है।*

न्यूनतम रूप में 20 : 40 *और* 25 :50 *अनुपात समान हैं, वह* 1 : 2 *है। अतः ये तुल्य अनुपात के उदाहरण हैं। साथ ही* 2 : 1 *का व्युत्क्रम* 1 : 2 *भी है। इससे स्पष्ट है कि अनुपात* 2 : 1 *तथा अनुपात* 1 : 2 *में अन्तर है। इसी प्रकार* 2 : 3 *और* 3 : 2 *तथा*5 : 4 *और* 4 :5 *के अन्तर को समझने का प्रयास कीजिए।*

कोई अनुपात 3 :5 लें। इसके अनेक रूप खोजें। जैसे

3 : 5 = $\frac{3}{5} = \frac{3\times2}{5\times2} = \frac{6}{10}$ =, $\frac{3}{5} = \frac{3\times10}{5\times10} = \frac{30}{50}$ $= \frac{3}{5} = \frac{3\times80}{5\times80} = \frac{240}{400}$,

यहाँ स्पष्ट है कि किसी अनुपात के भिन्न के अंश और हर में समान राशि से गुणा करने पर अनुपात वही रहता है अर्थात किसी अनुपात के प्रथम एवं द्वितीय पद में एक ही शून्येतर संख्या से गुणा करने पर अनुपात वही रहता है। एक उदाहरण और लें।

1 : 2 = $\frac{1}{2} = \frac{1\times5}{2\times5} = \frac{5}{10}$ और $\frac{1}{2} = \frac{1\times15}{2\times15} = \frac{15}{30}$

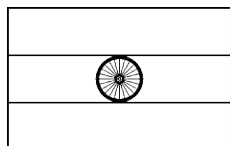
अब आप स्वयं सोचें, विचारें कि अनुपात के प्रत्येक पद में शून्येतर समान संख्या से भाग देने पर क्या परिणाम होगा ? समूह में विचार करें।

प्रयास कीजिए :

(1) कक्षा 6 के लड़कों और लड़कियों की संख्या में 60 : 15 अनुपात है, कक्षा 7 के लड़कों और लड़कियों की संख्या में 120 : 30 अनुपात है। क्या दोनों कक्षाओं के लड़कों और लड़कियों में अनुपात समान है ?

(2) अपनी कक्षा के दरवाजों की संख्या का खिड़कियों की संख्या के साथ अनुपात ज्ञात कीजिए।

12.2.2 अनुपात का सरलतम रूप

कक्षा 6 के कुछ शिक्षार्थियों ने कागज के बने एक झंडे की लम्बाई और चौड़ाई को नापा। उन्होंने पाया कि झ्ांडे की लम्बाई 36 सेमी और चौड़ाई 24 सेमी है।

झंडे की लम्बाई और चौड़ाई में क्या अनुपात है ?

झंडे की लम्बाई और चौड़ाई में अनुपात =36 : 24

उदाहरण **5:** 36 : 24 को सरलतम रूप में लिखिए :

प्रथम विधि

हम जानते हैं कि 36 : 24 = $\frac{36}{24}$

भिन्न $\frac{36}{24}$ ***को सरलतम रूप में लिखिए*** :

$\frac{36}{24} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ (***क्रमशः*** 4, 3 ***से भाग देने पर***)

$\frac{3}{2}$ ***को अनुपात के रूप में व्यक्त कीजिए*** :

$\frac{3}{2}$ = 3 : 2

हम देखते हैं कि :

36 : 24 = $\frac{36}{24} = \frac{3}{2}$ = 3 : 2

द्वितीय विधि :

36 : 24 ***को देखिए*** :

प्रत्येक पद में 2 ***से भाग देने पर*** 18 : 12

पुनः प्रत्येक पद में 2 ***से भाग देने पर*** 9 : 6

पुनः प्रत्येक पद में 3 ***से भाग देने पर*** 3 : 2

अब दोनों पदों में 1 ***के अतिरिक्त किसी अन्य संख्या से भाग नहीं दिया जा सकता है***। ***अतः***

36 : 24 ***का सरलतम रूप*** 3 : 2 ***है***। ***हम देखते हैं कि*** 36 : 24 ***को सरलतम रूप में व्यक्त करने के लिए प्रत्येक पद को*** 2 × 2× 3 =12 ***से भाग देकर सीधे प्राप्त किया जा सकता है***। ***अतः***

36 : 24 = $\frac{36}{12}$: $\frac{24}{12}$ =3 : 2

ध्यान दें ,

36 ***और*** 24 ***का महत्तम समापवर्तक*** 12 ***है***।

उदाहरण6: 48 : 72 ***का सरलतम रूप ज्ञात कीजिए*** :

हम देखते हैं कि 48 ***और*** 72 ***का महत्तम समापवर्तक*** 24 ***है***

अतः दोनों पदों में 24 ***का भाग देने पर***

48 : 72 = $\frac{48}{24}$: $\frac{72}{24}$ =2 : 3

निष्कर्ष :

किसी अनुपात को सरलतम रूप में व्यक्त करने के लिए दोनों पदों के महत्तम

समापवर्तक से प्रत्येक पद को विभाजित करते हैं।

उदाहरण 7. 15 *और* 25 *को सरलतम अनुपात में लिखिए।*

हल : 15 : 25 *के पदों* 15 *और* 25 *का म0स0* 5 *है। अत: प्रत्येक पद को*

5 *से भाग देने पर* 15 : 25 = $\frac{15}{5} : \frac{25}{5}$ = 3 : 5

उदाहरण 8. 90 *पैसे और रू*3 *को सरलतम अनुपात में व्यक्त कीजिए।*

हल : 90 *पैसे और रू*3 *का अनुपात*= $\frac{90 \text{ पैसे}}{₹\ 3} = \frac{90 \text{ पैसे}}{300 \text{ पैसे}}$

= $\frac{90}{300}$ = $\frac{3}{10}$ =3 : 10

उदाहरण 9.3 *घण्टे का* 45 *मिनट से अनुपात बताइए।*

हल : 3*घण्टे का* 45 *मिनट से अनुपात* = $\frac{3 \text{घण्टे}}{45 \text{मिनट}}$

$= \frac{3 \times 60 \text{ मिनट}}{45 \text{ मिनट}}$

$= \frac{180}{45}$

$= \frac{4}{1}$

= 4 :1

घण्टे और मिनट तथा रुपये और पैसे का अनुपात निकालने के लिए हम पहले दोनों राशियों को समान इकाई वाली राशियों में बदलते हैं।

निष्कर्ष :

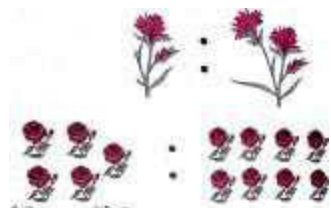
- *अनुपात केवल एक ही प्रकार की राशियों (सजातीय राशियों) में होता है।*
- *समान इकाई वाली राशियों को अनुपात के रूप में लिखने के बाद उनके साथ इकाई (मात्रक) को नहीं लिखा जाता है अर्थात् अनुपात का कोई मात्रक नहीं होता है।*
- *अनुपात को सरलतम रूप में व्यक्त किया जाता है।*
- *अनुपात के दोनों पदों में शून्य को छोड़कर एक ही संख्या से गुणा करने या भाग देने से अनुपात के मान में अन्तर नहीं पड़ता है।*

जैसे **5 : 6 =5 × 2 : 6 × 2 =10 : 12**

15 : 21 = $\frac{15}{3}$ **:** $\frac{21}{3}$ **= 5 : 7**

12.2.3 *दो अनुपातों की तुलना*

2 : 3 ***और*** 5 : 8 ***में कौन अनुपात बड़ा है***

2 : 3 ***को भिन्न के रूप में लिखिए*** :

2 : 3 = $\frac{2}{3}$

5 : 8 ***भिन्न के रूप में लिखिए*** :

5 : 8 = $\frac{5}{8}$

$\frac{2}{3}$ ***और*** $\frac{5}{8}$ ***में कौन सी भिन्न बड़ी है, कैसे ज्ञात करेंगे***\

दोनो भिन्नों को समहर बनाने पर

पहली भिन्न $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 8}{3 \times 8} = \frac{16}{24}$

दूसरी भिन्न $\frac{5}{8} = \frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{24}$

हम देखते हैं कि भिन्न $\frac{16}{24}$ ***भिन्न*** $\frac{15}{24}$ ***से बड़ी है***

अतः भिन्न $\frac{2}{3}$ ***भिन्न*** $\frac{5}{8}$ ***से बड़ी है।***

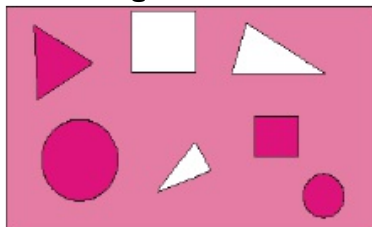
स्पष्ट है कि 2 : 3, 5 : 8 ***से बड़ा है।***

प्रयास कीजिए :

सीता और गीता के प्राप्तांकों में 2 :5 *का अनुपात है तथा आशीष और सर्वेश के प्राप्तांकों में*5 : 8 *का। लड़कियों का प्राप्तांक अनुपात अधिक है अथवा लड़कों का* |
जैनुल और आबिद ने साझे के व्यापार में 2 : 3 *के अनुपात में धन लगाया। यदि दोनो में रू*300 *का लाभ बाँटना हो, तो क्या दोनों को बराबर लाभ मिलेगा | सोचिए, लाभ का बँटवारा निवेश के अनुपात में होना चाहिए। जैनुल को लाभ का* $\frac{2}{5}$ *और आबिद को लाभ का* $\frac{3}{5}$ *मिलेगा। किसको अधिक लाभ मिलेगा* |
आइए हम अनुपात के विभिन्न रूप को समझें
2 :5 *पर विचार कीजिए।*
2 :5 *को भिन्न के रूप में लिखिए।*

$2 : 5 = \frac{2}{5}$

पुनः भिन्न को दशमलव रूप में लिखने पर $\frac{2}{5} = 0.4$
इस प्रकार अनुपात को भिन्न और दशमलव के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
अनुपात को भिन्न और दशमलव में व्यक्त कर सकते हैं।
प्रयास कीजिए :
4 :5 *तथा* 15 : 25 *को भिन्न और दशमलव में बदलिए।*

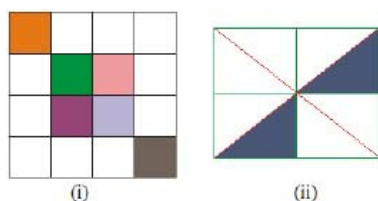
***अभ्यास* 12 (b)**
1. *आकृति को देखकर अनुपात निकालिए* :

(क) आयत के अन्तर के सभी त्रिभुजों की संख्या का वृत्तों की संख्या से।
(ख) आयत के अन्तर के सभी वर्गों की संख्या का सभी आकृतियों से
(ग) आयत के अन्तर के सभी वृत्तों का सभी आकृतियों से।
2. सरलतम रूप में अनुपात ज्ञात कीजिए :
(i) 2 का 4 से (ii)15 का 3 से (i) 3.5 का 105 से
(iv)50 पैसे का 3 रुपये से (v) 2 मीटर का 6 सेमी से
(vi) 2 घण्टे का 30 मिनट से
3. निम्नांकित अनुपातों को सरलतम रूप में लिखिए :
(i) 2 :16 **(ii)** 18 :90 **(iii)** 11 : 121
(iv) 13 : 39 **(v)** 36 :72 **(vi)** 5 किग्रा : 650किग्रा
4.कौन सा अनुपात बड़ा है |
(i) 3 :5 और5 : 8 में (ii) 2 : 7 और 6 : 8 में
(iii)40 पैसे : रू2 और 60 पैसे : रू4 में
5. निम्नांकित कथनों को अनुपात में व्यक्त कीजिए :
(i) एक खेत की लम्बाई उसकी चौड़ाई की चार गुनी है।
(ii) मोहन की आयु अपने पुत्र राजेश की आयु की तीन गुनी है।
(iii) गणित विषय में उत्तीर्ण कक्षा 6 के छात्रों की संख्या सम्मिलित छात्रों की संख्या की तीन चौथाइ है।
6a. एक विद्यालय के कक्षा 6 में 100 बच्चे पढ़ते हैं। इनमें 40 लड़के तथा शेष लड़कियाँ हैं। ज्ञात कीजिए :
(i) लड़के और लड़कियों की संख्या का अनुपात
(ii) लड़कों की संख्या और कुल बच्चों की संख्या में अनुपात।
b.एक विद्यालय में 200 बच्चे पढ़ते हैं, जिसमें से 60 बच्चे प्रदूषित जल पीने से बीमार पड़ गये, तो स्वस्थ और बीमार बच्चों की संख्या में अनुपात ज्ञात कीजिए।
7.अभिनव की आय रु5000 प्रतिमाह है। वह रू3000 प्रतिमाह व्यय कर देता है। अनुपात ज्ञात कीजिए।
(i) अभिनव की आय और व्यय में (iii)अभिनव के व्यय और आय में
(ii) अभिनव के व्यय और बचत में

8. ***निम्नांकित को अभ्यास पुस्तिका पर लिखिए और फिर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए*** :

(i) $\frac{8}{4} = \frac{......}{32}$ **(ii)** $\frac{....}{8} = \frac{25}{50}$

(iii) $\frac{16}{4} = \frac{48}{.....}$ **(iv)** $\frac{36}{....} = \frac{72}{12}$

9. ***निम्नांकित चित्रों में छायांकित भाग का अछायांकित भाग के अनुपात को सरलतम रूप में लिखिए***

(i) (ii)

10. ***सुहानी और पलक के बीच*** ₹80 ***को*** 3 : 2 ***में बाँटिये***

11. ***एक महिला अपनी बेटी श्रेया और भूमिका में*** ₹3600 ***को उनकी आयु के अनुसार बाँटना चाहती है। यदि श्रेया की आयु*** 15 ***वर्ष और भूमिका की आयु*** 12 ***वर्ष हो तो श्रेया और भूमिका को कितने-कितने रुपये मिलेंगे***?

12.3 *समानुपात* :

एक दिन शीला टमाटर और प्याज खरीदने के लिए बाजार गयी। वहाँ दो दुकानों पर उसने उस दिन टमाटर और प्याज के भाव निम्नवत् अंकित देखे —

		टमाटर (***मू.रुपये में***)	***प्याज*** (***मू. रुपये में***)
प्रथम दुकान	***भाव प्रति***5 ***किग्रा***	50	35
द्वितीय दुकान	***भाव प्रति*** 40 ***किग्रा***	400	280

दोनों दुकानों पर टमाटर और प्याज के भावों को अलग-अलग ढंग से प्रदर्शित देखकर शीला चिन्तन करने लगी कि किस दुकान से कौन-सी वस्तु खरीदनी सस्ती अर्थात् लाभप्रद होगी। उसने देखा कि प्रथम दुकान पर भाव प्रति5 ***किग्रा बताये गये है***

जब कि दूसरी दुकान पर भाव प्रति 40 किग्रा बताये गये हैं। उसने पाया कि दोनो दुकानों पर भारों का अनुपात5 किग्रा : 40 किग्रा =1 : 8 है।

अब उसने मूल्यों का अनुपात निकाला -

	प्रथम दुकान	*द्वितीय दुकान*	*अनुपात*
टमाटर	रु50	रु400	1:8
प्याज	रु35	रु280	1:8

उसने देखा कि दोनों दुकानों पर टमाटर और प्याज के मूल्यों में भी वही अनुपात है जो कि उनके भारों में है। अतः उसने निष्कर्ष निकाला कि दोनों दुकानों पर भाव भले ही देखने में अलग-अलग हों, किन्तु उनमें कोई भी अन्तर नहीं है क्योंकि प्रदर्शित भाव में वस्तुओं के भारों का जो अनुपात है, वही अनुपात उनके मूल्यों में भी है। अतः वह किसी भी दुकान से टमाटर और प्याज खरीद सकती है।

दैनिक जीवन में ऐसी समस्याएँ आती ही रहती हैं, जहाँ दो अनुपात आपस में बराबर हो जाते हैं। उपर्युक्त उदाहरण में

5किग्रा: 40 किग्रा =रु50 : रु400 =रु35 : रु280 =1:8

दो समान अनुपातों को समानुपात कहते हैं। समानुपात को दर्शाने के लिए चिह्न '::' का प्रयोग करते हैं।

उदाहरण के लिए हम कह सकते हैं कि 9:30 *और* 15:50 *में समानुपात है। उसे हम* 9:30 :: 15:50 *के रूप में लिखते हैं और* "9 *अनुपात* 30 *समानुपात* 15 *अनुपात*50" *पढ़ते हैं।*

निम्नांकित चित्र को देखें

चित्र - 1

1.*चित्र* (1) *में दो खंड हैं। दोनों खंडों में गुब्बारों के समूह दर्शाये गये हैं। इन चित्रों को*

देख कर प्रथम खंड के दोनों समूह के गुब्बारों की संख्या का अनुपात निकालें और पुनः दूसरे खंड के दोनों समूहों के गुब्बारों की संख्या का अनुपात निकालें।

हम देखते हैं कि प्रथम खंड के एक समूह में 2 गुब्बारे तथा दूसरे समूह में 4 गुब्बारे हैं। अतः प्रथम खण्ड के दोनों
समूह के गुब्बारों की संख्या का अनुपात 2 : 4 या सरलतम रूप में 1 : 2 है। इसी प्रकार दूसरे खंड के प्रथम समूह में
गुब्बारों की संख्या 3 तथा दूसरे समूह में गुब्बारों की संख्या इनका अनुपात 3 : 6 या 1 : 2 है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि दोनों खण्डों के गुब्बारों की संख्या का सरलतम अनुपात 1 : 2 है।

अत 2 : 4 : : 3 : 6

अर्थात दोनों खण्डों में गुब्बारों की संख्या समानुपात में है।

उदाहरण 9. शीला हिन्दी विषय में50 अंक और अंग्रेजी में 40 अंक पाती है। रमा हिन्दी और अंग्रेजी की उसी
परीक्षा में क्रमशः 45 और 36 अंक पाती है। बताइए कि

(i) शीला और रमा के हिन्दी में प्राप्त अंकों में क्या अनुपात है ?

(ii) शीला और रमा के अंग्रेजी में प्राप्त अंकों में क्या अनुपात है ?

हिन्दी में शीला और रमा द्वारा प्राप्त अंकों में50 और 45 का अनुपात है तथा अंग्रेजी विषय में शीला और रमा के
प्राप्तांकों में 40 और 36 का अनुपात है।

चूंकि50 : 45 =10 : 9

और 40 : 36 =10 : 9

अतः50 : 45 =40 : 36 अथवा50 : 45 : : 40 : 36

उदाहरण 10. एक युवक के द्वारा साइकिल द्वारा तय की गयी दूरी निम्न सारणी में दर्शाई गयी है। सारणी को
देख कर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) युवक एक और दो घण्टे में कितनी दूरियाँ तय करता है ?

(ii) एक घंटे में तय की गई दूरी और दो घंटे में तय की गयी दूरी में क्या अनुपात है ?

समय अन्तराल (घंटों में)	1	2	3	4	5	--	--
तय की गई दूरी(किमी में)	12	24	36	48	--	72	--

सारणी से स्पष्ट हैं :

(i) समय का अनुपात 1 घंटा : 2 घंटा =1 : 2

(ii) दूरियों का अनुपात 12 : 24 =1 : 2

ऊपर अंकित सारणी आप अपनी अभ्यास पुस्तिका में बनायें और रिक्त स्थानों की पूर्ति करें तथा समानुपात को

सोचें।

इस प्रकार उदाहरणों (8) (9) तथा (10) से हम पाते हैं कि :

प्रथम खंड के गुब्बारों की संख्या का अनुपात दूसरे खंड के गुब्बारों की संख्या के अनुपात के बराबर है।

शीला और रमा के हिन्दी में प्राप्त अंकों का अनुपातउन्हीं के द्वारा अंग्रेजी में प्राप्त अंकों के अनुपात के बराबर है।

समय का समय से तथा दूरी का दूरी से अनुपात बराबर है।

अत: निष्कर्ष निकालते हैं कि

जब दो अनुपात समान हों तो उनके ऐसे संबंध को समानुपात (सम+ अनुपात) कहते हैं।

समानुपात को इकाई रहित चार पदों में तथा चिह्न '=' के स्थान पर '::' समानुपाती चिह्न लगाकर भी

लिखते हैं।

यथा 2 : 4 =3 : 6 को 2 : 4 :: 3 : 6 लिखते हैं और "2 अनुपात 4 समानुपात 3 अनुपात 6" पढ़ते हैं।

इसी प्रकार

50 : 45 =40 : 36 या 50 : 45 :: 40 : 36 तथा

1 : 2 =12 : 24 या 1 : 2 :: 12 : 24 को भी समझें।

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि -

चार राशियाँ या संख्याएं या पद समानुपाती होते हैं जब पहले और दूसरे का अनुपात, तीसरे और चौथे

के अनुपात के बराबर हो।

समानुपात में चार पद होते हैं जिन्हें क्रमशः प्रथम पद (पहला पद) द्वितीय पद (दूसरा पद) तृतीय पद
(तीसरा पद) और चतुर्थ पद (चौथा पद) कहते हैं।
जैसे

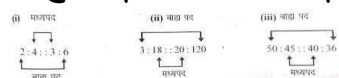
1 : 2 : : 20 : 40 *में प्रथम पद* 1, *द्वितीय पद* 2, *तृतीय पद* 20 *और चौथा पद* 40 *है।*

प्रयास कीजिए :

(1) 2 :5 *और* 40 : 100 *में क्या दोनों अनुपात समान हैं*?

(2) 1 : 3 : : 8 : 24 *में* 8 *कौन सा पद है*?

(3) 10 *रुपये का* 15 *रुपये और* 4 *का* 6 *को समानुपात ढंग से लिखिए।*

बाह्य पद और मध्यपद :

2 : 4 : : 3 : 6 3 : 18 : : 20 : 120 50 : 45 : : 40 : 36

बाह्य पद मध्यपद मध्यपद

उपर्युक्त चित्र (i) *में पहले और चौथे पद को बाह्य पद* (*चरमपद*) *और दूसरे तथा तीसरे पद को मध्यपद कहते हैं।*

यहाँ 2 *और* 6 *बाह्य पद तथा* 4 *और* 3 *मध्यपद हैं।*

चित्र(ii) *में बाह्य पद* (*चरमपद*) 3*और* 120 *अर्थात् पहला और चौथा पद*

मध्यपद 18 *और* 20 *अर्थात् दूसरा और तीसरा पद*

चित्र (iii) *में बाह्य पद* 50 *और* 36 *अर्थात् पहला और चौथापद*

मध्यपद =45 *और* 40 *अर्थात् दूसरा और तीसरा पद*

• *अपनी अभ्यास-पुस्तिका में निम्नांकित सारणी बनाइए, रिक्त स्थानों को भरिए तथा बाह्य पदों के गुणनफल और मध्यपदों के गुणनफल की समानता असमानता पर ध्यान दीजिए।*

क्र.	समानुपाती पद	बाह्य पदों का गुणनफल	मध्यपदों का गुणनफल	क्या बाह्य पदों का गुणनफल= मध्यपदों का गुणनफल
1.	1:2::4:8	8	8	हाँ
2.	5:6:: 15:18			
3.	3:4::24:32			
4.	2.5:2.4::7.5:7.2			
5.	2:5::4:10			

सारणी के अध्ययन से हम इस निष्कर्ष पर आते हैं कि

समानुपात में बाह्य पदों (चरमपदों) का गुणनफल =मध्यपदों का गुणनफल

प्रयास कीजिए :

3, 2, 4, 6 *चार पद हैं। क्या इन्हें* 3 : 2 : : 4 : 6 *लिखना सही होगा? यदि नहीं तो क्यों? समानुपात के प्रगुण (शर्त) का प्रयोग करें और अपने कथन की पुष्टि करें।*

व्यापक रूप :

यदि चार शून्येतर संख्याएं क्रमानुसार **a , b,c,d** *तो इनके समानुपाती होने* **ad=bc**

उदाहरण 12. *क्या* 12, 24, 24, 48 *समानुपात में हैं?*

हल : प्रथम विधि :12 : 24 = $\frac{12}{24}$ =1 : 2

24 : 48 = $\frac{24}{48}$ =1 : 2

यहाँ दोनों अनुपात बराबर (समान) हैं

अतः 12, 24, 24, 48 *समानुपात में हैं।*

द्वितीय विधि :

बाह्य पदों का गुणनफल =12 × 48 =576

मध्यपदों का गुणनफल =24 × 24 =576

यहाँ हम देखते हैं कि बाह्य पदों का गुणनफल =मध्यपदों का गुणनफल

अतः 12, 24, 24, 48 *समानुपात में हैं*

अर्थात् 12 : 24 :: 24 : 48

उदाहरण 13. 15 : 18 :: 45 :54 *की सत्यता की जाँच कीजिए।*

हल : *बाह्य पदों का गुणनफल* =15 ×54 =810

मध्य पदों का गुणनफल =18 × 45 =810

अर्थात् बाह्य पदों का गुणनफल =मध्यपदों का गुणनफल

अतः 15 : 18 :: 45 :54 *लिखना सत्य है।*

समानुपात के प्रश्नों में अज्ञात पद ज्ञात करना

निम्नांकित समानुपात में दूसरा पद ज्ञात नहीं है

8 :__:: 7 : 14

अतः दूसरे अज्ञात पद के लिए अक्षर संख्या लिखकर समानुपाती पदों को नीचे इस प्रकार लिखते हैं

8 : x :: 7 : 14

बाह्य पदों का गुणनफल = 8 ×14 =112

मध्य पदों का गुणनफल = $x \times 7 = 7x$

चूकिं मध्यपदों में स्थित है अतः समानुपात में होने के लिए

मध्य पदों का गुणनफल =बाह्य पदों का गुणनफल

अतः $7x$ =112

$x = \frac{112}{7} = 16$

x =16

प्रयास कीजिए :

(i)x ***का मान*** 16 ***लेकर समानुपात*** 8: x :: 7 : 14 ***में*** x ***का मान प्रतिस्थापित कीजिए और सत्यता की परख कीजिए*** ।

(ii)***चार समानुपाती पदों में मध्य पदों का गुणनफल*** 36 ***है। यदि बाह्य पदों में एक पद*** 3 ***हो तो दूसरा बाह्य पद क्या होगा*** ?

उदाहरण* 14. *क्या अनुपात 25 ***ग्रा*** : 30***ग्रा और*** 40 ***किग्रा*** : 48 ***किग्रा समानुपात में है*** ?

हल* :** 25 ***ग्रा : 30***ग्रा*** $= \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$ =5 : 6

40 ***किग्रा*** : 48 ***किग्रा***$= \frac{40}{48} = \frac{5}{6}$ =5 : 6

इसलिए 25 : 30 =40 : 48

अतः अनुपात 25***ग्रा*** : 30***ग्रा और*** 40 ***किग्रा*** : 48 ***किग्रा समानुपात में हैं।***

उदाहरण* 15. *क्या 30 ***सेमी का*** 3***मीटर से और*** 18 ***सेकेण्ड का*** 5 ***मिनट से अनुपात***

समानुपात में हैं?

हल : 30 सेमी का 3 मीटर से अनुपात =30: 3 ×100 (1 मीटर =100 सेमी) =1:10

18 सेकेण्ड का5 मिनट से अनुपात =18 :5×60 (1 मिनट =60 सेकेण्ड)

=3 :50

यहाँ 1:10 $\neq$ 3 :50 अतः दिए हुए अनुपात समानुपात में नहीं हैं।

उदाहरण **16.** कल्पना ने रू20 में 4 कलम खरीदे और अनुराधा ने रू80 में 16 कलम खरीदे। किसके कलम मँहगे थे।

हल **:** कल्पना द्वारा खरीदी गई कलमों की संख्या और अनुराधा द्वारा खरीदी गई कलमों की संख्या का अनुपात 4:16 =1:4

उनके मूल्यों का अनुपात 20 : 80 =1 : 4

4 :16 और 20 : 80 समान हैं। इस प्रकार दोनों ने समान मूल्य के कलम खरीदे।

अभ्यास **12(c)**

निम्नलिखित प्रश्न संख्या 1 में चार उत्तर और 2 में चार उत्तर दिए गये हैं। सही उत्तर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए :

1.समानुपाती पदों 20: 30 :: 60: 90 में

(i) 20 और 60 मध्यपद हैं।

(ii) 30 और 90बाह्य पद हैं।

(iii)20 और 30बाह्य पद हैं।

(iv) 30 और 60 मध्यपद हैं।

2. 25, 75, 500, 1000 समानुपात में नहीं हैं क्योंकि :

(i) यहाँ कोई बाह्य पद नहीं है।

(ii) बाह्य पदों का गुणनफल =मध्यपदों का गुणनफल नहीं है।

(iii) बाह्य पदों का गुणनफल =मध्यपदों का गुणनफल।

(iv) मध्यपदों का गुणनफल 3750 है।

3.नीचे लिखे समानुपाती पदों में x का मान निकालिए :

(i) x : 10 :: 20 : 40 **(ii)** 16 : 8 :: 8 : x **(iii)** 30 : 120 : : x : 300

(iv) 2.5 : x :: 1.25 : 2.5

4._**निम्नांकित कथन सत्य है या असत्य, लिखिए :**_

(i) 1 : 2 :: 2 : 4 (iv) **_अनुपात_** 3 : 4 **_और अनुपात_** 3 :5 **_समानुपात में हैं_**।

(ii) 3 **_पुस्तकें_** : 12 **_भैंसे_** :: 4 **_गायें_** : 16 **_कलम_**

(ii) **_चार पद समानुपात में तभी होंगे, जब चरमपदों का गुणनफल =मध्यपदों का गुणनफल_**।

5._**एक आयताकार कमरे की लम्बाई और चौड़ाई में**_ 5 : 4 **_का अनुपात है_**। **_यदि कमरे की लम्बाई_** 15 **_मीटर हो तो चौड़ाई बताइए_**।

6.15 **_अगस्त को विद्यालय में बाँटने के लिए लड्डू बनवाया गया_**। **_लड्डू बनाने में प्रयुक्त बेसन और चीनी में_** 1 : 3 **_का अनुपात है_**। **_यदि बेसन कुल_** 21 **_किग्रा लगा हो तो चीनी की मात्रा बताइए_**।

7._**यदि**_ 6, 18,x, 15 **_समानुपात में हैं तो_** x **_का मान क्या होगा_**?

8._**लखनऊ से कानपुर की दूरी और लखनऊ से इलाहाबाद के बीच की दूरी में**_ 3 : 8 **_का अनुपात हो और लखनऊ से इलाहाबाद के बीच की दूरी_** 200 **_किमी हो तो लखनऊ से कानपुर के बीच की दूरी क्या होगी_**?

9._**एक विद्यालय के लड़के और लड़कियों ने अलग-अलग**_ 2 : 3 **_के अनुपात में पौधे लगाये_**। **_यदि विद्यालय में कुल_** 1500 **_पौधे लगाये गए हों तो लड़के और लड़कियो द्वारा लगाये गए पौधों की संख्या अलग-अलग निकालिए_**।

10._**गौरव ने रू**_70 **_में_** 10 **_किाग्रा अमरूद बेचे तथा आरिफ ने_**5 **_किाग्रा अमरूद रू_**35**_में बेचे_**। **_किसका अमरूद सस्ता है_**? **_यदि ऐसा है तो वे किस भाव में अमरूद बेच रहे हैं_**? **_क्या दोनों अमरूद एक ही भाव में बेच रहे हैं_**?

12.4 प्रतिशतता :

_अग्रांकित चित्र को देख कर बताइए :_

•कुल कितने वर्ग हैं?
•काले रंग से रंगा हुआ एक वर्ग कुल वर्गों
का कौन सा-भाग है?
•लाल रंग से कितने वर्ग रंगे हैं?
•लाल रंग से रंगे 10 वर्ग पूरे खानों का
कौन सा भाग है?
हम देखते हैं कि :
काले रंग से रंगा एक वर्ग पूरे वर्ग का
एक सौवाँ भाग है।
इसी प्रकार, लाल रंग से रंगे 10 वर्ग पूरे का 10 सौवां भाग है।
एक सौका को हम $\frac{1}{100}$ या 1 प्रतिशत कहते हैं।

इसी प्रकार 10 सौवें भाग को $\frac{10}{100}$ या 10 प्रतिशत कहते हैं। प्रतिशत को चिह्न '%' से प्रदर्शित करते हैं।

इसे भी देखिए :
100 में से 8 = $\frac{8}{100}$ या 8 × $\frac{1}{100}$ =8%

$\frac{5}{50} = \frac{5 \times 2}{50 \times 2} = \frac{10}{100}$ या 10 × $\frac{1}{100}$ =10%

इसी प्रकार

80% = $\frac{80}{100}$ =80 × $\frac{1}{100}$

35.5% = $\frac{35.5}{100}$ =35.5× $\frac{1}{100}$

यहाँ हमने देखा कि :

• **1/100 को प्रतिशत के चिह्न (%) के रूप में लिखा जाता है।**

• 100 का 8% =8, यहाँ 100 के आधार पर प्रतिशतता 8 है।
आइए हम देखें प्रतिशत को भिन्न में कैसे बदलते हैं -

देखिए :

$30\% = 30 \times \frac{1}{100} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

$40\% = 40 \times \frac{1}{100} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$

$35\% = 35 \times \frac{1}{100} = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$

ध्यान दीजिए :

प्रतिशत को भिन्न में बदलने के लिए प्रतिशत की संख्या में प्रतिशत के चिह्न (%) ***के स्थान पर*** $\frac{1}{100}$ ***से गुणा करके सरल कर लेते हैं।***

भिन्न को प्रतिशत में बदलना

उदाहरण **17 :** ***भिन्न*** $\frac{3}{20}$ ***को प्रतिशत में बदलिए।***

हल : $\frac{3}{20} = \frac{3}{20} \times \frac{100}{100}$ (***क्योंकि अंश और हर दोनों में समान संख्या का गुणा करने पर मान अपरिवर्तित***

$= \left(\frac{3}{20} \times 100\right) \times \frac{1}{100} = \left(\frac{3}{20} \times 100\right)\%$

=15%

नोट : $\frac{3}{20}$ ***के हर और अंश में***5 ***का गुणा करके भी*** 15% ***में बदल सकते हैं।***

उदाहरण*18.*एक दुकानदार के पास 40 ***आइसक्रीम के कप थे।*** 25 ***कप बिक गये। कुल कितने प्रतिशत कप बिके***?

हल : ***बिका हुआ भाग*** = $\frac{25}{40} = \frac{25}{40} \times \frac{100}{100} = \left(\frac{25}{40} \times 100\right) \times \frac{1}{100} = 62.5 \times \frac{1}{100} = 62.5\%$

ध्यान दीजिए :

भिन्न को प्रतिशत में बदलने के लिए भिन्न को ऐसी समतुल्य भिन्न में बदलते हैं, जिसका हर 100 हो। $\frac{1}{100}$ के स्थान पर % का चिह्न लगा देते हैं।

अभ्यास 12 (d)

1.निम्नांकित में 100 **के आधार पर प्रतिशतता बताइए** :

(i)18% **(ii)** 24% **(iii)** 47% **(iv)** 63%

2.निम्नांकित को भिन्न के सरलतम रूप में लिखिए :

(i)12% **(ii)** 15% **(iii)** 75% **(iv)** 35%

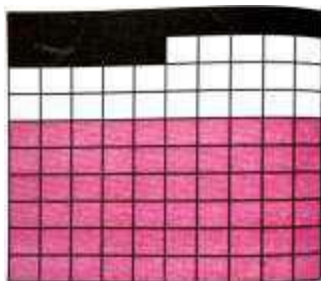
3.प्रतिशत में प्रदर्शित कीजिए :

(i) $\frac{1}{4}$ **(ii)** $\frac{3}{20}$ **(iii)** $\frac{2}{5}$ **(iv)** $\frac{3}{4}$

4.नीचे की तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति अपनी अभ्यास पुस्तिका में कीजिए :

क्रमांक	भिन्न रूप	प्रतिशत
1.	–	25%
2.	$\frac{3}{4}$	–
3.	–	16%
4.	$\frac{2}{5}$	–

प्रतिशत को दशमलव भिन्न में बदलना :

देखिए :

1. 15 काले वर्ग पूरे खानों का

15 सौवां भाग = 15% = $\frac{15}{100}$

=0.15

2. 60 **लाल खाने पूरे वर्गों का**

60 ***सौवां भाग*** =60% = $\frac{60}{100}$

=0.60

इसी प्रकार

75% =75 × $\frac{1}{100}$ = $\frac{75}{100}$ =0.75

उदाहरण* 19. 65% *को दशमलव भिन्न में बदलिए।

हल **:**65% =65 × $\frac{1}{100}$ = $\frac{65}{100}$ =0.65

प्रयास कीजिए **:**

• ***निम्नांकित सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति अपनी अभ्यास पुस्तिका में कीजिए।***

प्रतिशत	45%	36%	78%	90%	12.5%	2.5%	200%	125%	....
दशमलव भिन्न	0.45	...	....	....	.....	....	....	...	0.5

प्रतिशत को दशमलव में बदलने के लिए % के चिह्न को हटाकर दो अंक बायीं ओर दशमलव खिसका देते हैं।

दशमलव को प्रतिशत में बदलना **:**

0.25 *को प्रतिशत में बदलिए।*

$0.25 = 0.25 \times \frac{100}{100} = (.25 \times 100) \times \frac{1}{100}$

=(0.25 × 100) % =25%

इसी प्रकार

$0.085 = 0.085 \times \frac{100}{100} = (0.085 \times 100) \times \frac{1}{100}$

=(0.085 × 100) % =8.5%

दशमलव संख्या को प्रतिशत में बदलने के लिए दशमलव को दो स्थान दायीं ओर खिसकाते हुए संख्या को प्रतिशत के चिह्न के साथ लिखते हैं।

अभ्यास 12(e)

1. *निम्नलिखित को दशमलव में बदलिए* :

(i) 25% **(ii)** 35% **(iii)** 30% **(iv)** 80%

2. ***निम्नलिखित को प्रतिशत में बदलिए*** :

(i) 0.12 **(ii)** 0.03 **(iii)** 0.025 **(iv)** 1.25

3. ***नीचे दी गयी तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति अपनी अभ्यास पुस्तिका में कीजिए***

।

क्रमांक	भिन्न रूप	दशमलव	प्रतिशत
1.	$\frac{2}{20}$	–	–
2.	–	.3	–
3.	–	–	80%
4.	–	0.08	–
5.	–	–	5%

प्रतिशत के अनुसार किसी संख्या का मान ज्ञात करना -

आइए हम किसी राशि का दिये गये प्रतिशत के अनुसार मान ज्ञात करने की विधि को जानें

500 ***का*** 35% ***कितना होगा*** ?

यहाँ 500 ***दिया गया है***, ***इसका*** 35% ***ज्ञात करना है***।

500 ***का*** 35% $= 500 \times 35 \times \frac{1}{100} = 500 \times 35 \times \frac{1}{100} = 175$

इसी प्रकार

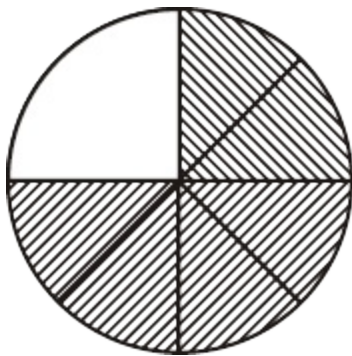
360 ***का*** 30% $= 360 \times 30\% = 360 \times 30 \times \frac{1}{100} = 108$

उदाहरण* 18.** ***श्रुति ने 65% ***अंक वार्षिक परीक्षा में प्राप्त किये*** । ***यदि पूर्णांक*** 500 ***रहा हो***, ***तो श्रुति को कितने अंक मिले*** ?

हल : ***श्रुति का प्राप्तांक*** =500 keâe 65% $= 500 \times 65\%$

$= 500 \times 65 \times \frac{1}{100} = 325$

एक राशि को दूसरी राशि के प्रतिशत के रूप में प्रदर्शित करना

पाश्र्वांकित चित्र देखिए :

•*चित्र का कितने प्रतिशत भाग छायांकित है* ?

हम देखते हैं कि वृत्त के 8 *भागों में से* 6 *भाग अर्थात्* $\frac{6}{8}$ *भाग छायांकित है*

$\frac{6}{8} = \frac{6}{8} \times \frac{100}{100} = \frac{6}{8} \times 100 \times \frac{1}{100}$

$= \left(\frac{6}{8} \times 100\right)\% = 75\%$

उदाहरण **21.** *प्रतीक्षा ने वार्षिक परीक्षा में* 700 *में से* 490 *अंक प्राप्त किये। उसे कुल कितने प्रतिशत अंक मिले*?

हल : प्रतीक्षा को मिले अंकों का प्रतिशत $= \frac{490}{700} \times \frac{100}{100} = \left(\frac{490}{700} \times 100\right) \times \frac{1}{100}$

$= \left(\frac{490}{700} \times 100\right)\% = 70\%$

*उदाहरण*22.*एक विद्यालय में* 500 *बच्चे हैं। इनमें से वार्षिक परीक्षा में*375 *बच्चे उत्तीर्ण हुए। दूसरे विद्यालय में* 800*बच्चे हैं, जिनमें से वार्षिक परीक्षा में* 500 *बच्चे उत्तीर्ण हुए। किस विद्यालय का परीक्षाफल अधिक अच्छा रहा* ?

हल : पहले विद्यालय के बच्चों का उत्तीर्ण प्रतिशत $= \frac{375}{500} \times \frac{100}{100} = \frac{375}{500} \times 100 \times \frac{1}{100}$

$= \left(\frac{375}{500} \times 100\right)\% = 75\%$

दूसरे विद्यालय के बच्चों का उत्तीर्ण प्रतिशत $= \frac{500}{800} \times \frac{100}{100} = \frac{500}{800} \times 100 \times \frac{1}{100}$

$= \left(\frac{500}{800} \times 100\right)\% = 62.5\%$

इस प्रकार पहले विद्यालय का परीक्षाफल अधिक अच्छा रहा।

अभ्यास **12 (f)**

1. *कितना होगा* ?

(i) 250 *का* 30% **(ii)** 300 *का* 40%

(iii) 120*किग्रा का* 45%**(iv)** 678 *लीटर का* 75%

2. *कितने प्रतिशत होगा* ?

(i) 144 *में से*s 48 **(ii)** 220 *किग्रा में से*s 55 *किग्रा*

(iii) *रु* 5 *का* 25 *पैसा* **(iv)**18 *किग्रा का* 450 *ग्राम*

3.*एक परीक्षा में* 75% *बच्चे उत्तीर्ण हुए। यदि परीक्षा में* 1500 *बच्चे बैठे हों, तो कुल कितने बच्चे उत्तीर्ण हुए* ?

4.*एक विद्यालय में* 2800 *बच्चे हैं। उनमें से* 980 *लड़कियाँ हैं। विद्यालय में कितने प्रतिशत लड़के हैं*?

5.*एक रिपोर्ट के अनुसार ग्रामीण क्षेत्रों में बच्चों के लिए घातक* 10 *बीमारियों में से*5 *बीमारियाँ प्रदूषित जल के*

कारण होती हैं, तो बताइए कि कितने प्रतिशत बीमारियाँ प्रदूषित जल के कारण होती हैं।

6.*किसी विद्यालय में* 400 *बालिकाएँ हैं, किन्तु स्वच्छता सम्बन्धी सुविधा न होने के कारण लगभग* 12 *प्रतिशत*

बालिकाएँ विद्यालय छोड़ देती हैं, तो बताइए कितनी बालिकाएँ विद्यालय छोड़ देती हैं।

7.*एक रक्तदान शिविर में किसी क्षेत्र विशेष के* 300 *सदस्य स्वेच्छया रक्तदान करते हैं। यदि उस क्षेत्र की कुल*

जनसंख्या के केवल 30% *लोगों ने ही रक्तदान किया हो, तो रक्तदान न करने वाले लोगों की संख्या ज्ञात कीजिए।*

8.*ग्रामीण शौचालय निर्माण योजनान्तर्गत सरकार गरीबी रेखा के नीचे के प्रति परिवार को रू*9000 *का अनुदान दे*

*रही है। यदि किसी गाँव में इस योजना के अन्तर्गत कुल रू*3,60,000 *वितरित किये गये हों, तो उस गाँव में कितने*

प्रतिशत परिवार लाभान्वित हुए, जबकि उस गाँव में कुल 200 *परिवार निवास करते हैं।*

9.*किसी नगरपालिका में कुल* 40*वार्ड हैं। पूरे नगर में मच्छर उन्मूलन योजनान्तर्गत, फागिंग पर प्रतिवर्ष प्रतिवार्ड में*
*रू*2500 *व्यय करने का प्राविधान है। यदि सामान्य स्वास्थ्य पर एक करोड़ रुपये की बचट स्वीकृत हो, तो मच्छर*
उन्मूलन पर इस स्वीकृत शशि का कितने प्रतिशत धन खर्च किया जा रहा है।
10. *एक बालिका विद्यालय की* 16% *बालिकाएँ रक्ताल्पता से पीड़ित हैं। यदि किसी माह में स्वास्थ्य विभाग द्वारा*
ऐसी बालिकाओं को 30 *गोलियाँ प्रति बालिका की दर से आयरन की कुल* 1920 *गोलियाँ वितरित की गयीं, तो*
विद्यालय में शिक्षा ग्रहण करने वाली सभी बालिकाओं की संख्या क्या है ?

बढ़ा हुआ प्रतिशत ज्ञात करना :
उदाहरण 23. *डीजल का मूल्य रू*27.50 *प्रति लीटर था। अब उसका मूल्य बढ़कर रू*33.00 *प्रति लीटर हो गया*
डीजल के मूल्य में कितने प्रतिशत की वृद्धि हुई ?
हल : डीजल का बढ़ा मूल्य=वर्तमान मूल्य प्रति लीटर — पहले का मूल्य प्रति लीटर
रू(33.00—27.50) *प्रति लीटर= रू*5.50 *प्रति लीटर*

मूल्य में प्रतिशत वृद्धि = $\frac{\text{मूल्य में वृद्धि (बढ़ा मूल्य)}}{\text{पहले का मूल्य}} \times 100$

$= \frac{5.50}{27.50} \times 100 = \frac{550}{27.50}$

मूल्य में वृद्धि =20%
आइए हम जानें कि मूल्य में प्रतिशत वृद्धि कैसे ज्ञात करते हैं
पहले बढ़ा हुआ मूल्य ज्ञात कर लेते हैं।
फिर पहले के मूल्य से भाग देते हैं।
अब भागफल या प्राप्त भिन्न को प्रतिशत में बदलते हैं।
उदाहरण 24. *एक नगर की जनसंख्या* 1981 *की जनगणना में*5, 17,524 *थी।* 1991 *की जनगणना में यह*

जनसंख्या 6, 46, 905 हो गयी। नगर की जनसंख्या कितने प्रतिशत बढ़ गयी?

हल : 1991 में जनसंख्या =6,46,905

1981 में जनसंख्या =5,17,524

अत: जनसंख्या में वृद्धि =6,46,905-5,17,524 =1,29,381

जनसंख्या में प्रतिशत वृद्धि = $\frac{\text{जनसंख्या में वृद्धि}}{\text{पहले की जनसंख्या}} \times 100$

$= \frac{1,29,381}{5,17,524} \times 100$

$= \frac{1,29,38100}{5,17,524} = 25$

नगर की जनसंख्या 25% बढ़ गयी।

घटा हुआ प्रतिशत ज्ञात करना :

उदाहरण 25. चीनी का मूल्य रू16.00 प्रति किग्रा था। उसका मूल्य घटकर रू14.00 प्रति किग्रा हो गया। चीनी के मूल्य में कितने प्रतिशत की कमी हुई?

हल : चीनी के मूल्य में कमी= रू(16.00 - 14.00) प्रति किग्रा= रू2.00 प्रति किग्रा

चीनी के मूल्य में प्रतिशत कमी = $\frac{\text{मूल्य में कमी}}{\text{पहले का मूल्य}} \times 100$

$= \frac{2}{16} \times 100$ =12.50

इस तरह हमने देखा

$\text{बढ़ा \%} = \frac{\text{बढ़ा मूल्य}}{\text{पहले का मूल्य}} \times 100$

$\text{घटा \%} = \frac{\text{घटा मूल्य}}{\text{पहले का मूल्य}} \times 100$

अभ्यास 12(g)

1. कितना होगा?

(i) रु. 150 का 12% (ii) 60 किग्रा का 40%

(iii) 2.5 मीटर का 15% (iv) 1250 लीटर का 75%

2. चित्र को देखिए और बताइए -

(i) छायांकित भाग पूरे का कौन-सा भाग है?

(ii) छायांकित भाग पूरे का कितने प्रतिशत है?

3. निम्नलिखित को प्रतिशत में बदलिए -

(i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{3}{8}$ (iii) $\frac{3}{25}$ (iv) $1\frac{3}{5}$

4. निम्नांकित को दशमलव भिन्न में बदलिए -

(i) 12.5% (ii) 45% (iii) 62.5% (iv) 85%

5.रिक्त स्थानों की पूर्ति अपनी उत्तर पुस्तिका में करें :

क्रमांक	भिन्न रूप	दशमलव रूप	प्रतिशत रूप	प्रतिशतता
(i)	$\frac{2}{5}$	—	—	
(ii)	—	.04	—	—
(iii)	—	—	40.5%	—
(iv)	—	—	—	8

6. कितना प्रतिशत होगा ?

(i) रू50 का रू10 (ii) 90 मीटर का 22.5 मीटर

(iii) 450 किग्रा का 135 किग्रा (iv) 1000 लीटर का 42 लीटर

प्रश्न 7 से 9 तक उत्तर का सही विकल्प छाँटिए :

7. एक टेम्पो 25 किमी प्रति घण्टा की चाल से जा रहा था। उसकी चाल 5% बढ़ गयी। अब उसकी चाल होगी -

(क)30 किमी प्रति घण्टा (ख) 105 किमी प्रति घण्टा

(ग) 26.25 किमी प्रति घण्टा (ग) 23.75 किमी प्रति घंटा

8.अप्रैल माह की 10 तारीख को किसी स्थान का तापमान 40 ° था। अगले दिन बरसात होने के कारण तापमान30% गिर गया। अब तापमान होगा-

(क) 70 ° (ख)10 ° (ग) 12 ° (ग) 28 °

9. एक वस्तु का मूल्य रू800 था। इसमें 8^3 की कमी हो गयी। अब नया मूल्य होगा -

(क) रु 64 (ख) रु 736

(ग) रु 864 (घ) रु 792

10. एक गाँव में 15% लोग निरक्षर हैं। यदि गाँव की जनसंख्या 2400 हो, तो गाँव में कुल कितने लोग निरक्षर हैं
?

11. रहीम ने गणित में50 में से 33 अंक प्राप्त किये तथा हिन्दी में 60 में से 36 अंक। रहीम को किस विषय में अच्छे अंक मिले ?

12. एक गाँव में 2500 पुरुष और 2400 महिलाएँ हैं। दूसरे गाँव में 4000 पुरुष और

3600 महिलाएँ हैं। किस
गाँव में महिलाओं का प्रतिशत अधिक है?
13. अकरम ने एक विषय में 20 में से 12 अंक प्राप्त किये। उसने कितने प्रतिशत अंक प्राप्त किये?
14. एक उद्यान में 37.5% पेड़ जामुन के हैं। शेष पेड़ आम के हैं। यदि उद्यान में पेड़ो की कुल संख्या 400 हो, तो
आम के पेड़ों की संख्या कितनी होगी?
15. मदन ने बाजार से 90 सेब खरीदे। यदि 20% सेब खराब निकल गये, तो कितने अच्छे सेब बचे?
16. एक शिविर में 600 सैनिक थे। 60 सैनिक और आ गये। सैनिकों में कितने प्रतिशत की वृद्धि हो गयी?
17. एक खम्भा 16 मीटर लम्बा है। इसका 40%भाग लाल, 25%भाग काला और शेष पीला रंगा है। पीला रँगा
हुआ भाग कितने मीटर होगा?
18. एक गाँव की जनसंख्या में 12% की कमी हो जाती है। यदि गाँव की जनसंख्या 25000 हो, तो जनसंख्या में
कमी होने के बाद गाँव में कितने लोग होंगे?
19. एक चुनाव क्षेत्र में 80,000 मतदाता थे। दो प्रत्याशियों में से एक प्रत्याशी को डाले गये मतों का 60% मत
मिले। यदि कुल 80% मत पड़े हों, तो दूसरे प्रत्याशी को कितने मत मिले?
20. एक छड़ 72 सेमी लम्बी थी। इसमें से 9 सेमी काटकर खूँटी बना दी गयी। छड़ अब कितने प्रतिशत छोटी हो
गयी?
21. एक विद्यालय में कक्षा 6 के बच्चों की संख्या विद्यालय के कुल बच्चों की संख्या का 15% है। यदि कक्षा 6 के
बच्चों की संख्या51 हो, तो विद्यालय में कुल कितने बच्चे हैं?
22. ग्रामीण विद्युतीकरण परियोजना के अन्तर्गत किसी मलिन बस्ती में प्रति परिवार 2 बल्ब जलाने और एक पंखा
चलाने पर प्रतिमाह बिजली पर औसतन खर्च रू180 आता है। यदि विद्युत उत्पादन का व्यय 20% बढ़ जाए तो
प्रति परिवार बिजली का खर्च प्रतिमाह कितने रुपये हो जाएगा।

12.5. लाभ-हानि :

खरीद फरोख्त हमारे दैनिक जीवन की सामान्य प्रक्रिया है। कोई वस्तु जितने में खरीदी जाती है, उसे क्रय मूल्य
कहते हैं तथा जितने में बेची जाती है उसे विक्रय मूल्य कहते हैं। सामान्यतः यह स्पष्ट है कि किसी वस्तु का क्रय मूल्य
विक्रय मूल्य से कम हो तो वस्तु के बेचने में लाभ होता है और लाभ विक्रय मूल्य और क्रय मूल्य के अन्तर के बराबर
होता है। इसे इस प्रकार लिखते हैं :

लाभ =विक्रय मूल्य — क्रय मूल्य

यदि वस्तु का विक्रय मूल्य क्रय मूल्य से कम होता है तो वस्तु के बेचने में हानि होती है और यह हानि क्रय मूल्य
और विक्रय मूल्य के अन्तर के बराबर होता है। इसे इस प्रकार लिखते हैं :

हानि =क्रय मूल्य — विक्रय मूल्य

लाभ और हानि क्रय मूल्य पर ही निर्धारित किये जाते हैं।

आइए हम क्रय मूल्य, विक्रय मूल्य,लाभ और हानि के सम्बन्धों पर विचार करें। ऊपर हम जाँच कर चुके हैं कि जब
विक्रय मूल्य > क्रय मूल्य तब वस्तु के विक्रय करने पर लाभ होता है। लाभ =विक्रय मूल्य — क्रय मूल्य
जब विक्रय मूल्य < क्रय मूल्य तब वस्तु के विक्रय करने पर हानि होती है।

हानि =क्रय मूल्य — विक्रय मूल्य

उदाहरण 26: रमेश ने एक पुरानी साइकिल रू650 में खरीदी और उसकी मरम्मत पर रू150 खर्च किये। उसने
साइकिल को रू825 में बेच दी। उसे कुल कितना लाभ हुआ?

साइकिल का क्रय मूल्य = रु 650

मरम्मत में खर्च= रू150

लागत मूल्य= रू(650 + 150)= रू800

साइकिल का विक्रय मूल्य= रू825

लाभ=विक्रय मूल्य - लागत मूल्य

= रू(825 - 800)= रू25

इस प्रकार सामान बेचने से पहले उस पर अतिरिक्त व्यय जैसे-मजदूरी, वाहन शुल्क, मरम्मत आदि लगते हैं, उन्हें

'उपरिव्यय' (Overhead Charges)*कहते हैं। ये 'उपरिव्यय' क्रय मूल्य के भाग बन जाते हैं।*

अत: उपरिव्यय की दशा में लागत मूल्य इस प्रकार है -

लागत मूल्य=वस्तु खरीदते समय भुगतान की गई राशि + उपरिव्यय

अभ्यास 12 (h)

1. *निम्नांकित सारणी में रिक्त स्थानों को अपनी अभ्यास पुस्तिका में भरिए -*

क्रम संख्या	क्रय मूल्य रुपयों में	विक्रय मूल्य रुपयों में	लाभ रुपयों में	हानि रुपयों में
1	100	115	□	—
2	□	1500	300	—
3	700	□	—	150
4	1200	1100	—	□

2.रहीम ने एक घड़ी रू1400 में खरीदकर रू1600 में बेच दी। उसे कितना लाभ हुआ?

3.गीता ने एक साड़ी रू750 में बेची, इसमें रू125 की हानि हुई। साड़ी का क्रय मूल्य

ज्ञात कीजिए।

4.एक किसान ने एक गाय रू1300 में खरीदी और उसे रू250 की हानि उठाकर बेच दी। किसान ने गाय कितने

रुपये में बेंची ?

5.हरीश ने एक पुरानी स्कूâटर रू7000 में खरीदी और रू600 उसकी मरम्मत में खर्च किया। बताइए स्कूâटर का

लागत मूल्य क्या है ?

6.डेविड ने एक मकान रू48000 में खरीदा । उसने उसकी रंगाई-पोताई और साज-सज्जा में रू2000 खर्च किया ।

उसने उस मकान को रु55000 में बेंच दिया । बताइए उसे कितना लाभ हुआ ?

12.5.1 लाभ-प्रतिशत, हानि-प्रतिशत :

शिक्षक छात्रों द्वारा दुकानदार और ग्राहक का अभिनय कराकर लाभ-हानि तथा उधार आदि की अवधारणा को

विकसित करेंगे।

उदाहरण 27. एक पुस्तक विक्रेता ने एक पुस्तक रू20 में खरीद कर रू21 में बेच दी और दूसरे पुस्तक विक्रेता ने

एक पुस्तक रु50 में खरीद कर रु51 में बेच दी । सोचिए -

(i) पहले पुस्तक विक्रेता को कितना लाभ हुआ ?

(ii) दूसरे पुस्तक विक्रेता को कितना लाभ हुआ ?

(iii) किस पुस्तक विक्रेता का व्यापार अधिक लाभ प्रद है ?

पहले पुस्तक विक्रेता के लिए ;

क्रय मूल्य = रु 20

विक्रय मूल्य= रू21

लाभ= रू(21-20)= रू1

इसी प्रकार दूसरे पुस्तक विक्रेता के लिए

क्रय मूल्य= रू50

विक्रय मूल्य= रू51

लाभ= रू(51-50)= रु1

आप देख रहे हैं कि दोनों विक्रेताओं को समान लाभ हो रहा है। ऐसी स्थिति में क्या यह सही होगा कि दोनों का व्यापार बराबर और ठीक चल रहा है ? नहीं, आखिर क्यों? अब विचार कीजिए, सोचिए। क्या दोनों का पूँजी निवेश कुल लाभ लेने के लिए समान रूप से हुआ है ? नहीं। लाभ तो समान है परन्तु पूँजी निवेश अलग-अलग है। पहले पुस्तक विक्रेता ने रू20 लगाकर रू1 कमाया दूसरे ने रू50 अर्थात् पहले विक्रेता से ढाई गुना अधिक पूँजी लगाकर वही रू1 लाभ अर्जित किया। आप समझ गये होंगे कि कौन विक्रेता लाभ में है। स्पष्ट है कि पहला पुस्तक विक्रेता दूसरे से अधिक लाभान्वित है क्योंकि वह कम पूँजी में वही लाभ ले रहा है जो दूसरा पुस्तक विक्रेता पहले विक्रेता से अधिक पूँजी लगाकर पा रहा है।

प्रयास कीजिए :

(i) रमेश ने रू10 की पेंसिल रू15 में तथा अनवर ने रू30 की पेंसिल को रू35 में बेचा। किसने अधिक लाभ कमाया और क्यों ?

(ii) एक नींबू विक्रेता ने रू5 में 4 नींबू खरीदा और रू4 में 5 नींबू बेचा। सोचिए विक्रेता लाभ में है या हानि में ?

(iii) आप अपनी कक्षा के कुछ साथियों को लें और उनसे पूँजी निवेश के अलग-अलग अर्थात् कुछ से कम और कुछ से ज्यादा निवेश के उदाहरण लेकर विक्रय मूल्य की संकल्पना करें, करायें तथा लाभ, हानि निकलवायें।

आइए, विचार करें कि क्या समान पूँजी (समान लागत मूल्य) लगाने पर समान लाभ मिलेगा ? अलग-अलग पूँजी लगाने पर अलग -अलग लाभ अथवा हानि होगी ? उत्तर में कहना होगा - कभी हाँ तो कभी ना। एक उदाहरण लेते हैं - अम्बिका के पिता ने एक गाय रू1500 में खरीदी और रू1,800 में बेच दी, अम्बिका के चाचा ने भी रू1500 की एक गाय खरीदी किन्तु गाय की सींग टूट जाने के कारण उसे बेचने पर चाचा को रू1200 ही मिले। लागत मूल्य (निवेशित पूँजी) समान होते हुए भी एक को लाभ तो दूसरे को हानि।

पूँजी निवेश का एक और ढंग है - अनुपात में पूँजी लगाना। जब पूँजी अनुपात में होगी तो लाभ, हानि का बंटवारा वैâसे होगा ? विचार कीजिए। जैसे गणेश और गोविन्द ने एक व्यापार में 2 : 3 में पूँजी लगाई और वर्ष के अन्त मे

रू500 का लाभ दोनों में वैâसे बटेगा? क्या समान लाभ बाँटना उचित होगा ? कदापि नहीं। समझिए 2:3 के अनुसार गणेश को 2 मिले तो गोविन्द को 3 अर्थात् कुल लाभ का गणेश को $\frac{2}{5}$ तथा गोविन्द को $\frac{3}{5}$ भाग मिलेगा। गणेश को लाभ का $\frac{2}{5}$ अर्थात 500 का $\frac{2}{5}$ = रू200 मिलेगा। गोविन्द को कितना लाभ मिलेगा और यह लाभ पूरे लाभ का कौन भाग होगा ? निकालिए।

आप सीख चुके हैं :-

(i) दो या दो से अधिक अनुपातों की तुलना करना

(ii) ऐकिक नियम से अनुपात अथवा भिन्नों की समानता या असमानता ज्ञात करना।

अब हम 1 इकाई से बढ़कर 100 इकाई पर आधारित गणना सीखेंगे।

इस परिच्छेद के प्रारम्भ के उदाहरण को लें : -

पहले पुस्तक विक्रेता के लिए :

रू20 क्रय मूल्य पर लाभ= रू1

रू1 क्रय मूल्य पर लाभ= रु $\frac{1}{20}$

रू100 क्रय मूल्य पर लाभ= ₹ ($\frac{1}{20}$ × 100)

= रू5

लाभ=5%

दूसरे पुस्तक विक्रâता के लिए :-

रू50क्रय मूल्य पर लाभ= रू1

रू1 क्रय मूल्य पर लाभ = रु $\frac{1}{50}$

रु 100क्रय मूल्य पर लाभ = रु ($\frac{1}{50}$ × 100)

= रु 2

लाभ =2%

इस प्रकार से स्पष्ट है कि :

पहले पुस्तक विक्रेता का लाभ=5%

दूसरे पुस्तक विक्रेता का लाभ =2%

अतः पहले पुस्तक विक्रेता का व्यापार दूसरे पुस्तक विक्रेता की तुलना में अधिक लाभप्रद है।

दो व्यापारों में लाभ या हानि की तुलना करने के लिए लाभ या हानि को प्रतिशतता के रूप में व्यक्त किया जाता है।

***उदाहरण* 28:** *कमला ने एक सिलाई मशीन रु*500 *में खरीदकर रु*540 *में बेच दी। कमला को कितने प्रतिशत लाभ हुआ?*

क्रय मूल्य= रु500

विक्रय मूल्य= रु540

विक्रय-मूल्य, क्रय-मूल्य से अधिक है।

लाभ=*विक्रय-मूल्य* — *क्रय-मूल्य*

= रु(540 - 500)= रु40

***प्रथम विधि* :**

लाभ : *क्रय मूल्य*=40 : 500

=8 : 100 (*द्वितीय पद को* 100 *बनाने पर*)

लाभ=8%

***द्वितीय विधि* :**

रु500 *क्रय मूल्य पर लाभ*= रु40

रु1 *क्रय मूल्य पर लाभ*= रु $\frac{40}{500}$

रु100 *क्रय मूल्य पर लाभ* = रु $\frac{40 \times 100}{500}$

= रु 8

∴ *लाभ*=8%

हमने देखा, लाभ प्रतिशत= रु $\frac{40 \times 100}{500}$

***अतः लाभ प्रतिशत*=** $\frac{\text{लाभ} \times 100}{\text{क्रय मूल्य}}$

लाभ-प्रतिशत= लाभ × $\frac{100}{\text{क्रय मूल्य}}$

इसी प्रकार,

हानि-प्रतिशत= $\text{हानि} \times \frac{100}{\text{क्रय मूल्य}}$

***उदाहरण* 29. *एक व्यापारी* रु500 *प्रति कुन्तल की दर से गेहूँ खरीदकर* रु450 *प्रति कुन्तल की दर से बेच देता है।*
*प्रतिशत हानि बताइए।***

हल : क्रय मूल्य= रु500 *प्रति कुन्तल*

विक्रय मूल्य= रु450 *प्रति कुन्तल*

व्यापारी को हानि हुई=क्रय मूल्य - विक्रय मूल्य

= रु(500 - 450)= रु50 *प्रति कुन्तल*

हानि-प्रतिशत= $\text{हानि} \times \frac{100}{\text{क्रय मूल्य}}$

$= \frac{50 \times 100}{500} = 10$

अत: व्यापारी को 10% *की हानि हुई।*

उदाहरण* 30. *गोपाल ने* रु300 *में एक रेडियो खरीदा। वह उसे कितने रुपये में बेचे कि उसे* 20% *का लाभ हो?

हल : रेडियो का क्रय मूल्य= रु300

लाभ=क्रय मूल्य का 20%

= रु $\frac{300 \times 20}{100}$ = रु60

रेडियो का विक्रय मूल्य=क्रय मूल्य + *लाभ*

=रु(300 + 60)= रु360

अत: गोपाल रेडियो को रु360 *रुपये में बेंचे।*

उदाहरण* 31. *रीता ने एक गाय* 25% *के लाभ पर बेच दिया। यदि रीता को कुल लाभ* रु350 *मिला हो तो गाय का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : कुल लाभ= रु350

लाभ-प्रतिशत= रु25

रु25 *लाभ है तो क्रय मूल्य है*= रु100

रु1 *लाभ है तो क्रय मूल्य हw* = रु $\frac{100}{25}$

$\therefore$ रु 350 ***लाभ है तो क्रय मूल्य है*** = रु $\frac{100 \times 350}{25}$ = रु 1400

गाय का विक्रय मूल्य=क्रय मूल्य + *लाभ*

= रू(1400 + 350)= रू1750

उदाहरण 32. *एक साइकिल रू1800 में बेचने पर 10³ की हानि हुई। साइकिल का क्रय मूल्य क्या होगा?*

हल : हानि=10%

अर्थात् रू100 क्रय मूल्य की वस्तु रू90 में बेची जाती है।

∴ रू90 *विक्रय मूल्य है तो क्रय मूल्य*= रू100

∴ रू1 *विक्रय मूल्य है तो क्रय मूल्य* = रु $\frac{100}{90}$

∴रु 1800 *विक्रय मूल्य है तो क्रय मूल्य* = रु $\frac{100 \times 1800}{90}$

= रु 2000

उदाहरण 28. *एक व्यक्ति ने 4 दर्जन अंडे रू15 प्रति दर्जन की दर से खरीदा। उनमें से 6 अंडे टूट गए और शेष को उसने रू20 प्रति दर्जन के भाव से बेच दिया। उसका प्रतिशत लाभ या प्रतिशत हानि बताइए।*

हल : 4*दर्जन अंडों का मूल्य*= रू15× 4= रू60

6 *अंडे टूट गए*

शेष अंडे=(4×12 - 6) *अंड*=(48 - 6) *अंडे*=42 *अंडे*

∴ 12 *अंडों का विक्रय मूल्य*= रू20

∴1 *अंडे का विक्रय मूल्य* = रु $\frac{20}{12}$

∴ 42 *अंडों का विक्रय मूल्य* = रु $\frac{20 \times 42}{12}$ = रु 70

विक्रय मूल्य= रू70

लाभ=विक्रय मूल्य - क्रय मूल्य

= रू(70—60)= रू10

लाभ-प्रतिशत = $\frac{\text{लाभ} \times 100}{\text{क्रय मूल्य}}$

= $\frac{10 \times 100}{60}$ = $16\frac{2}{3}$

व्यक्ति को $16\frac{2}{3}$% *का लाभ हुआ।*

अभ्यास 12 (i)

1. *निम्नांकित सारणी में जहाँ संभव हो, रिक्त स्थानों की पूर्ति अपनी अभ्यास पुस्तिका में कीजिए।*

क्रम सं.	क्रय मूल्य (रु में)	विक्रय मूल्य (रु में)	लाभ (रु में)	हानि (रु में)	लाभ % (प्रतिशत में)	हानि% (प्रतिशत में)
1	200	212	....		.....	
2	500	480		....	.....	....
3	.....	495	45		.....	
4	800	825	.....		......	
5	1200	......	144		......	

2. *एक दुकानदार ने एक किताब रू10 में खरीदकर रू11 में बेच दी। कितने प्रतिशत लाभ हुआ?*

3.एक व्यापारी ने 10 किग्रा घी रू1500 में खरीदकर उसे रू200 प्रति किग्रा के भाव में बेच दिया। बताइए उसे कितने प्रतिशत का लाभ हुआ ?

4.एक हीटर रू180 में खरीदा गया और रू160 में बेचा गया । बताइए कितने प्रतिशत की हानि हुई?

5.एक घड़ी रू360 में खरीदी गई तथा 10% लाभ पर बेच दी गयी, तो उसका विक्रय मूल्य बताइए।

6.रोमेश ने एक स्कूटर रू36000 में खरीदी। वह उसे कितने रुपये में बेचे कि 30^3 का लाभ हो?

7.एक टेपरिकार्डर 12% की हानि से रू880 में बेचा गया। उसका क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए ।

8.मोहित ने एक बछड़ा रू2500 में खरीदा और उसे 6% की हानि पर बेच दिया। बछड़े का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए ।

9.एक फर्नीचर विक्रेता ने एक सोफासेट 5% लाभ से रू4620 में बेचा। उसका लाभ ज्ञात कीजिए।

10.प्रतिशत लाभ या प्रतिशत हानि ज्ञात कीजिए जबकि

(क) क्रय मूल्य = रु 120 विक्रय मूल्य = रु 150

(ख) क्रय मूल्य= रु 500 विक्रय मूल्य = रु 650

(ग) क्रय मूल्य = रु 90.75विक्रय मूल्य= रु 60.50

11. 7 मेजों को रू1288 में बेचने पर 8% की हानि होती है । एक मेज का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

12.एक फल-विक्रेता ने रू10 प्रति दर्जन के भाव से कुछ संतरे खरीदे और उन्हें रू9 प्रति दर्जन के भाव से बेच दिए । बताइए उसे कितने प्रतिशत की हानि हुई ।

13.महमूद ने 5 दर्जन अंडे रू12 प्रति दर्जन की दर से खरीदा । उनमें से 10 अंडे टूट गए और शेष को उसने रू18 प्रति दर्जन के भाव से बेच दिया । उसका प्रतिशत लाभ या हानि ज्ञात कीजिए।

14.बताइए निम्न कथनों में कौन सत्य है और कौन असत्य है ।

(1) लाभ प्रतिशत = $\frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}}$

(2) 20% लाभ का अर्थ है रू100 क्रय मूल्य पर रू20 लाभ और रू80 विक्रय मूल्य

(3) लाभ प्रतिशत या हानि प्रतिशत सदैव क्रय मूल्य पर ज्ञात करते हैं ।

साधारण ब्याज :

प्रायः यह देखने में आता है कि किसी भी व्यक्ति का व्यावहारिक जीवन में उधार के लेन-देन के बिना कार्य करना बहुत कठिन होता है। उधार के लेन-देन की प्रक्रिया बैंकों, सहकारी समितियों या किसी व्यक्ति द्वारा की जाती है। क्या आप जानते हैं कि उधार के लेन-देन में कुछ शर्त होती है? आपको ज्ञात होना चाहिए कि उधार देने वाला व्यक्ति उधार लेने वाले के सामने कुछ शर्त रखता है जिसके अन्तर्गत उधार देने वाला व्यक्ति उधार लेने वाले से वार्षिक या मासिक की दर से प्रति रु100.00 पर कुछ रुपया अधिक लेता है।

जितना धन राशि वह उधार देता है, वह मूलधन कहलाता है। शर्त की अवधि पूर्ण होने पर जो धन चुकता करता है, वह मिश्रधन कहलाता है और मूलधन से अधिक दिया गया धन ब्याज कहलाता है। आइए हम इसे एक उदाहरण

के माध्यम से समझें।

उदाहरण **34.***रमेश ने एक बैंक से रू*500.00, 4% *वार्षिक ब्याज की दर से उधार लिया।* 2 *वर्ष बाद ब्याज की गणना कीजिए।*

हल: मूलधन= *रू*500.00, *समय*=2 *वर्ष*, *दर*=4% *वार्षिक*

*रू*100 *का* 1 *वर्ष का ब्याज*= *रू*4 *है*

$\therefore$ *रू*1 *का* 1 *वर्ष का ब्याज* = *रु* $\frac{4}{100}$

$\therefore$ *रु* 500 *का* 1 *वर्ष का ब्याज* = *रु* $\frac{4 \times 500}{100}$

$\therefore$ *रु* 500 *का* 2 *वर्ष का ब्याज* = *रु* $\frac{4 \times 500 \times 2}{100}$ = *रु* 40

$\therefore$ *ब्याज* = *रु* 40

विचार कीजिए

1.*एक किसान बैल खरीदने के लिए बैंक से रू*5000 *ऋण लेता है । एक वर्ष बाद रू*5500 *बैंक को देकर ऋण चुका देता है । सोचिए बैंक ने किसान को ऋण क्यों दिया* ?

2.*एक व्यापारी ने रू*3000 *बैंक में जमा किया । उसने* 2 *वर्ष बाद बैंक से कुल धन वापस ले लिया। बैंक ने उसे रू*3300 *वापस दिया । विचार कीजिए व्यापारी ने बैंक में रुपये क्यों जमा किया* ?

हम देखते हैं कि **:**

(1) *बैंक ने ऋण, अधिक धनराशि पाने के लिए दिया ।*

(2) *व्यापारी ने जमाधन से अधिक धन पाने के लिए बैंक में रुपये जमा किये ।*

इस प्रकार स्पष्ट है कि उधार ली गयी धनराशि से अधिक धन वापस किया जाता है या जमा की गई धनराशि से अधिक धन वापस मिलता है। इस अधिक धन को 'ब्याज' नाम दिया गया है ।

जमा की गई अथवा उधार ली गई, धनराशि से जो 'अधिक' धनराशि ली जाती है अथवा दी जाती है, उसे 'ब्याज' कहते हैं ।

•जमा अथवा उधार (ऋण) की धनराशि को 'मूलधन' कहते हैं।

•जिस निश्चित अवधि के लिए धन जमा रहता है या उधार या ऋण रहता है उस अवधि को 'समय' कहते हैं।

• रू100 के मूलधन पर 1 वर्ष के लिए प्राप्त 'ब्याज' को 'ब्याज दर' कहते हैं। ब्याज की दर को '%' (प्रतिशत) के रूप में व्यक्त करते हैं। ब्याज दर को केवल 'दर' भी लिखकर प्रयोग करते हैं।

• ब्याज की दर प्रतिशत तिमाही, प्रतिशत छमाही अथवा प्रति रुपया प्रति मास के रूप में भी प्रयुक्त होती है।

ब्याज निम्नलिखित तीन बातों पर निर्भर है :

• कितना रुपया जमा किया या उधार लिया ?

• कितने समय के लिए रुपया जमा किया या उधार लिया ?

• किस ब्याज दर पर रुपया जमा किया या उधार लिया ?

उदाहरण 30.सन्तोष ने एक गाय खरीदने के लिए बैंक से रू1,500 ऋण लिया और 1 वर्ष बाद रू1,620 वापस देकर ऋण चुका दिया। बताइए सन्तोष ने कितना ब्याज दिया ?

हल : मूलधन= रू1,500

वापस की गई धनराशि= रू1,620

ब्याज=वापस की गई धनराशि - मूलधन

= रु 1,620 - रु1,500 = रु120

ब्याज के प्रकार :

ब्याज के दो प्रकार हैं :-

(1) साधारण ब्याज

(2) चक्रवृद्धि ब्याज

साधारण ब्याज ज्ञात करने में प्रतिवर्ष का ब्याज समान होता है। जबकि चक्रवृद्धि ब्याज में दूसरे वर्ष से ब्याज बढ़ने लगता है। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि दूसरे वर्ष में मूलधन में पहले वर्ष के ब्याज को जोड़कर उस पर ब्याज निकाला जाता है। इसी प्रकार तीसरे वर्ष में मूलधन में पहले और दूसरे वर्ष के ब्याज को जोड़कर ब्याज की गणना की जाती है। इस इकाई में हम ''साधारण ब्याज'' का अध्ययन करेंगे और

साधारण ब्याज के लिए ब्याज शब्द का प्रयोग करेंगे। चक्रवृद्धि ब्याज का अध्ययन अगली कक्षा में करेंगे।

***उदाहरण*36.** *रु*500 *के लिए* 4% *छमाही ब्याज की दर से* 1 *वर्ष का ब्याज ज्ञात कीजिए।*

हल **:** *मूलधन*= *रु*500

समयावधि=1 *वर्ष*=2 *छमाहियाँ*

छमाही ब्याज की दर =4%

प्रथम विधि **:**

*रु*100 *पर* 1 *छमाही का ब्याज*= *रु*4

*रु*1 *पर* 1 *छमाही का ब्याज* = *रु* $\frac{4}{100}$

रु 500 *पर* 1 *छमाही का ब्याज* = *रु* $\frac{500 \times 4}{100}$

रु 500 *पर* 2 *छमाही का ब्याज* = *रु* $\frac{500 \times 4 \times 2}{100}$

अत: *साधारण ब्याज*= *रु*40

द्वितीय विधि **:**

1 *छमाही का साधारण ब्याज* = *रु* 500 keâe 4%

= *रु* $\frac{500 \times 4}{100}$

= *रु* 20

2 *छमाही का साधारण ब्याज* = *रु* 2 × 20

= *रु* 40

उदाहरण*37.रु*400,3 *वर्ष के लिए* 6% *वार्षिक ब्याज की दर से उधार दिया गया। ब्याज ज्ञात कीजिए।*

हल **:** *प्रथम विधि* **:** *रु*100 *पर* 1 *वर्ष का ब्याज*= *रु*6

*रु*1 *पर* 1 *वर्ष का ब्याज* = *रु* $\frac{6}{100}$

रु 400 *पर* 3 *वर्ष का ब्याज* = *रु* $\frac{400 \times 6 \times 3}{100}$

= *रु* 72

द्वितीय विधि : 1*वर्ष का ब्याज* = *रु* 400 *का* 6%

= रु 400 का $\frac{6}{100}$

= रु $\frac{400 \times 6}{100}$

3 वर्ष का ब्याज = रु $\frac{400 \times 6 \times 3}{100}$

= रु 72

उपर्युक्त उदाहरण37 के हल को देखिए और बताइए :

(i) रू400 कैसा धन है ?

(ii) 6% = $\frac{6}{100}$ क्या प्रदर्शित करता है ?

(iii)3 का प्रयोग किस लिए किया गया ?

हम देखते हैं कि :

(i) रू400 मूलधन है

(ii)6% या $\frac{6}{100}$ ब्याज दर है

(iii)3 का प्रयोग समय बताने के लिए किया गया है।

उपर्युक्त उदाहरणों से हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि ब्याज का सम्बन्ध मूलधन, समय और ब्याज दर से है। इन चारों अर्थात् मूलधन, समय, ब्याज दर और ब्याज में से किसी एक का मान शेष तीन के मान पर निर्भर करता है। इनके सम्बन्ध को निम्नलिखित सूत्र के रूप में लिखा जाता है :

ब्याज = $\frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$

हम निम्नलिखित दोहे से भी ब्याज दर ज्ञात कर सकते हैं :

"मूलधन, ब्याज दर, समय का, मोहन गुणा कराय

एक सौ से भाग दें, ब्याज तुरत मिल जाय ।"

यहाँ मोहन शिक्षार्थी के रूप में सम्बोधित है ।

उदाहरण38. रू500का3 वर्ष का 12% वार्षिक ब्याज की दर से साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए ।

हल : मूलधन= रू500

समय=3 वर्ष

दर=12³ वार्षिक

ब्याज = $\frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$

= **रु** $\frac{500 \times 12 \times 3}{100}$

= **रु** 180

प्रयास कीजिए :

कितने मूलधन का 2 ***वर्ष का*** 10^{3} ***वार्षिक ब्याज की दर से ब्याज रु***360 ***होगा*** ?

सुमित ने मोहित को कुछ धन 5% ***वार्षिक ब्याज की दर पर उधार दिया। मोहित ने सारा धन उसी दिन बिरजू को*** $8\frac{1}{2}$% ***वार्षिक दर पर उधार दे दिया।*** 1 ***वर्ष बाद मोहित को इस लेन देन में रु***350 ***का लाभ हुआ। सुमित ने मोहित को कितना उधार दिया था।***

अशरफ ने साइकिल खरीदने के लिए बैंक से रु1,500; 4% ***वार्षिक साधारण ब्याज की दर से ऋण लिया और*** 2 ***वर्ष में ऋण चुका दिया। अशरफ ने बैंक को कितना ब्याज दिया*** ? ***यह भी बताइए कि अशरफ ने बैंक को कुल कितना धन लौटाया*** ?

मूलधन= **रु**1500

दर=4% ***वार्षिक***

समय=2 ***वर्ष***

ब्याज = $\frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$

= **रु** $\frac{1500 \times 4 \times 2}{100}$

= **रु** 120

अशरफ द्वारा बैंक को लौटाया गया धन= **रु**(***मूलधन*** + ***ब्याज***)

= **रु** (1500 + 120)

= **रु** 1,620

यहाँ रु1,620 ***रुपये को मिश्रधन कहते हैं।***

मिश्रधन=मूलधन + ब्याज

मूलधन=मिश्रधन - ब्याज

ब्याज=मिश्रधन - मूलधन

उदाहरण39. यदि मूलधन= **रु**2,500 , ***समय***=2 ***वर्ष, दर***=12% ***वार्षिक तो ब्याज एवं***

मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

हल : ब्याज = **रु** $\frac{\text{मू} \times \text{द} \times \text{स}}{100}$ (***जहाँ मू***=***मूलधन***, ***द***=***ब्याज दर***, ***स***=***समय***)

= **रु** $\frac{2,500 \times 12 \times 2}{100}$

= **रु** 600

मिश्रधन=***मूलधन*** + ***ब्याज***= **रू**2,500 + **रू**600= **रु**3,100

उदाहरण*40. *माता प्रसाद ने साधन सहकारी समिति से 5 ***बोरी यूरिया खाद रू***230 ***प्रति बोरी के भाव से***, 12% ***वार्षिक ब्याज की दर पर ऋण लिया। उसे वर्ष के अन्त में समिति को कितना रुपया देना होगा।***

हल : 5 ***बोरी यूरिया खाद का मूल्य***= **रू**230 × 5=**रू**1150

ब्याज= **रु** $\frac{1150 \times 12 \times 1}{100}$

= **रु** 138

मिश्रधन= **रू**1150 + **रू**138= **रू**1,288

वर्ष के अन्त में माता प्रसाद को समिति को देना होगा= **रू**1,288

उदाहरण*41. *किस वार्षिक ब्याज की दर से 10 ***वर्ष में किसी धन का मिश्रधन तीन गुना हो जाएगा*** ?

हल : मान लिया मूलधन रू100 ***है।***

मिश्रधन=***मूलधन का तिगुना***= **रु**300

ब्याज= **रु**300 - **रू**100= **रू**200

∴ 100 ***पर*** 10 ***वर्ष का ब्याज***= **रू**200

∴ **रू**100 ***पर*** 1 ***वर्ष का ब्याज*** = **रु** $\frac{200}{10}$

= **रु** 20

वार्षिक ब्याज दर=20%

उदाहरण*42.** 6%वार्षिक ब्याज की दर से*** 2***वर्ष का मिश्रधन रू***560 ***है। मूलधन निकालिए।***

हल : ∴ **रू**100 ***पर*** 1 ***वर्ष का ब्याज***= **रू**6

रू100 ***पर*** 2 ***वर्ष का ब्याज***= **रू**2 ×6= **रू**12

मिश्रधन= रु100 + रु12= रु112

∴ रु112 ***मिश्रधन है तो मूलधन***= रु100

∴ रु1 ***मिश्रधन है तो मूलधन*** = रु $\frac{100}{112}$

∴ रु 560 ***मिश्रधन है तो मूलधन*** = रु $\frac{100 \times 560}{112}$ =रु 500

अभ्यास 12 (j)

1. ***ब्याज***= $\frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$ ***को ध्यान में रखिए और नीचे लिखे प्रश्नों को अपनी अभ्यास पुस्तिका में लिखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।***

(*क*) = $\frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$ **(*ख*) *मूलधन*** = $\frac{\text{ब्याज} \times 100}{\text{दर} \times \square}$

(*ग*) *दर*= $\frac{\text{ब्याज} \times 100}{\square \times \text{समय}}$ **(*घ*) *समय***= $\frac{\text{ब्याज} \times 100}{\text{मूलधन} \times \square}$

(*च*) *ब्याज* = $\frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{\quad}$

2.*निम्नलिखित सारणी अपनी अभ्यास पुस्तिका में बनाइए और रिक्त स्थान भरिए* :

क्रम संख्या	मूलधन रुपये में	मूलधन रुपये में	मिश्रधन (रुपये में)
1	100	10	□
2	500	□	525
3	□	50	600
4	1000	□	1120

3. ***ब्याज की दर बताइए***

मूलधन	समय	ब्याज	ब्याज की दर।
(i) रु 100	1 वर्ष	रु 8	□
(ii) रु 400	1 वर्ष	रु 20	□
(ii) रु 600	2 वर्ष	रु 72	□

4.*ब्याज की गणना कीजिए।*

मूलधन	दर	समय	ब्याज
(i) रु 100	7%	1 वर्ष	□
(ii) रु 500	4%	1 वर्ष	□
(ii) रु 50	2पैसे प्रति रुपया प्रतिमाह	4 माह	□

5.*नीचे दिए गए कोष्ठक के विकल्पों में से सही विकल्प चुनकर खाली स्थान की पूर्ति अपनी अभ्यास पुस्तिका में ही कीजिए* :

(***ब्याज, मूलधन, दर, मिश्रधन***)

(***क***) ***जो धन उधार दिया या लिया जाता है उसे*** .... ***कहते हैं।***

(***ख***) ***उधार ली गयी धनराशि के उपयोग के बदले दी जाने वाली अतिरिक्त राशि को*** .... ***कहते हैं।***

(ग) ....=*मूलधन* + *ब्याज*
(ग) *मिश्रधन* - *ब्याज*=..............

6.*वार्षिक ब्याज दर ज्ञात कीजिए यदि मूलधन*= रू100 , *समय*=1 *वर्ष औरमिश्रधन*= रू107 *हो*।

7.*एक किसान ने* 12% *वार्षिक ब्याज की दर से रू*2,400 *उधार लिया। उसने* $2\frac{1}{2}$ *वर्ष बाद रू*1,200 *तथा*
एक गाय देकर उधार चुका दिया। गाय का मूल्य ज्ञात कीजिए।

8.रू12.5% *वार्षिक ब्याज का क्या अर्थ है*? *लिखिए*।

9.*जार्ज ने एक स्कूल को रु*3600 *दान दिया। इस दान राशि के ब्याज से समान मूल्य की* 6 *छात्रवृत्तियां दी*
जाती हैं। यदि दान की राशि पर 10% *वार्षिक ब्याज मिले तो प्रत्येक छात्रवृत्ति का मूल्य ज्ञात कीजिए।*

10.*करीम बाग लगाने के लिए बैंक से रू*15000 *का ऋण लेता है। बैंक पौधों की खरीद के लिए ऋण का*
20% *छूट देने के बाद शेष धनराशि पर* 9% *वार्षिक साधारण ब्याज लेता है।* 4 *वर्ष बाद, करीम पूरा*
ऋण अदा करने के लिए बैंक को कितना धन देगा?

11.*किस वार्षिक साधारण ब्याज की दर से* 20 *वर्षों में किसी धन का मिश्रधन चार गुना हो जाएगा*?

12.7. ***व्यवहार गणित*** **:**

मानव सभ्यता के विकास के साथ वस्तुओं की परस्पर आदान-प्रदान एवं क्रय-विक्रय की प्रक्रिया शुरू हुई
होगी। प्रारम्भिक काल में लोग दैनिक जीवन से सम्बन्धित गणितीय समस्याओं को मौखिक रूप से हल
करने के लिए अपनी सुविधानुसार वस्तुओं के दर या उनके माप को गणना की दृष्टिकोण से छोटे-छोटे भागों
में बाँट कर गणना करते और उन्हें जोड़ कर सरलतम रूप में वस्तुओं के मूल्यों का निर्धारण कर लेते थे।
आज भी बहुत-से लोग इस विधि से वस्तुओं का मूल्य सुगमतापूर्वक निकाल लेते हैं।
दैनिक जीवन के व्यवहार में प्रयुक्त होने वाली सरलतम गणना की विधि को व्यवहार गणित कहते
हैं। इसमें अधिकांश क्रियाएँ मौखिक होती हैं।

♦ *मोहन ने सलीम की दुकान से* 4 *किग्रा आलू रु*3.75 *प्रति किग्रा की दर से खरीदा।*
मोहन आलू का मूल्य मन
*ही मन जोड़ रहा था कि सलीम ने कहा रु*15.00 *दो, कब तक जोड़ते रहोगे?*
मोहन आश्चर्य में था, सलीम की गणना पर। उसने सलीम से इतनी शीघ्रता से मूल्य निकालने की कला के
विषय में पूछा। सलीम ने हंसते हुए कहा -
अरे भाई :
1. *रु*3 *के भाव से, रु*12
2. 50 *पैसे के भाव से, रु*2
3. 25 *पैसे के भाव से रु*1
*इस प्रकार रु*3.75 *की दर से (भाव से)* 4 *किग्रा आलू का दाम रु*15।
•*सलीम सब्जी विक्रेâता द्वारा बताई गई मूल्य की गणना विधि निम्नांकित है :*

*रु*4.00 *रु*1.00 *प्रति किग्रा की दर से*

*रु*12.00 *रु*3.00 *प्रति किग्रा की दर से*

*रु*2.00 *रु*0.50 *प्रति किग्रा की दर से* 50 *पैसा रु*1 *का* $\frac{1}{2}$

रु 1.00 *रु* 0.25 *प्रति किग्रा की दर से* 25 *पैसा* 50*पैसे का* $\frac{1}{2}$

रु 15.00 *रु* 3.75 *प्रति किग्रा की दर से*

4 *किग्रा आलू का मूल्य रु*3.75 *प्रति किग्रा की दर से, व्यवहार गणित गणना विधि से निम्नांकित रूप से भी ज्ञात कर सकते हैं :*

*रु*4.00 *रु*1.00 *प्रति किग्रा की दर से*

*रु*16.00 *रु*4.00 *प्रति किग्रा की दर से*

*रु*1.00 *रु*0.25 *प्रति किग्रा की दर से रु*0.25 *रु*1 *का* $\frac{1}{4}$

रु 15.00 *रु* 3.75 *प्रति किग्रा की दर से*

दैनिक जीवन में व्यवहार में प्रयुक्त गणना की इस विधि को व्यवहार गणित कहते हैं। व्यवहार गणित में अधिकांश क्रियाएँ मौखिक और त्वरित होती हैं। इसके लिए किसी संख्या का $\frac{1}{2}$ (आधा),

$\frac{1}{4}$ (चौथाई), $\frac{1}{3}$ (तिहाई), $1\frac{1}{4}$ (सवा), $1\frac{1}{2}$ (ड्योढ़ा) निकालने का त्वरित अभ्यास आवश्यक है।

निष्कर्ष :

व्यवहार गणित में अपेक्षित मान निकालने हेतु गणना विभिन्न तरह से की जा सकती है। किन्तु अपनी समझ से सरलतम और सहज विधि अपनाना उत्तम होगा।

उदाहरण43. एक कमीज बनवाने में** 2.25 **मीटर कपड़ा लगता है। इसी माप की** 15 **कमीजों के लिए कितना कपड़ा चाहिए?

हल :

5***कमीज का कपड़ा*** = $\frac{1}{2}$ ×10 ***कमीज का कपड़ा***

2.25 ***मीटर***= 1 ***कमीज में लगा कपड़ा***

22.50 ***मीटर*** =10 ***कमीज में लगा कपड़ा***

11.25 ***मीटर*** =5 ***कमीज में लगा कपड़ा***

33.75 ***मीटर*** =15 ***कमीज में लगा कपड़ा***

उदाहरण44. 28.4 ***तथा*** 99.5 ***का गुणा व्यवहार गणित की विधि से ज्ञात कीजिए।***

हल : 28.4 →28.4 ***में*** 1 ***से गुणा***

2840.0 →28.4 ***में*** 100 ***से गुणा***

14.2 →28.4 ***में*** 0.5 ***से गुणा***

2825.8→ 28.4 ***में*** 99.5 ***से गुणा***

अभ्यास 12 (k)

निम्नांकित प्रश्नों में दिये गये विकल्पों में से सही विकल्प चुनकर रिक्त स्थान भरिए :

1.

1	3.50
10	35.00
20	

(क) 65.00 (ख) 70.00 (ग) 75.00 (ग) 80.00

2.

1	2.25
10	22.5
12	

(क) 25.00 (ख) 28.00 (ग) 27.00 (ग) 30.00

3.

1	1.25
10	12.50
5	

(क) 6.25 (ख) 6.50 (ग) 7.00 (ग) 5.00

4. *एक पाठशाला में* 175 *मीटर टाट रू*4.25 *प्रति मीटर की दर से खरीदा गया। कुल टाट का मूल्य व्यवहार गणित द्वारा ज्ञात कीजिए।*

5.*एक बोरे आलू का भार* 79.750 *किग्रा है। ऐसे ही* 151 *बोरे आलू का भार व्यवहार गणित द्वारा निकालिए।*

6.95 *किग्रा चीनी का मूल्य रू*16.25 *प्रति किग्रा की दर से व्यवहार गणित द्वारा ज्ञात कीजिए।*

7.*एक कार* 1 *लीटर पेट्रोल में* 16.50 *किमी का औसत देती है।* 15 *लीटर पेट्रोल में वह कितनी दूर जा सकती है?* *व्यवहार गणित द्वारा निकालिए।*

इस इकाई में हमने सीखा

1.*अनुपात क्या है, इसे अनेक उदाहरणों द्वारा समझाया गया है।*

2.*अनुपात सदैव समान इकाइयों वाली राशियों में ज्ञात किया जाता है।*

3.*दो राशियों में अनुपात ज्ञात करते समय इनमें से कोई राशि शून्य नहीं होनी*

चाहिए।

4.अनुपात को दशमलव या भिन्न में बदल सकते हैं।

5.जब दो अनुपात समान होते हैं तो उनमें समानुपात का सम्बन्ध होता है। इस प्रकार समानुपात में चार पद
होते हैं।

6.समानुपात में बाह्य पदों का गुणनफल मध्य पदों के गुणनफल के बराबर होता है।

7.प्रतिशत को भिन्न तथा भिन्न को प्रतिशत में बदल सकते हैं।

8.क्रय-विक्रय की प्रक्रिया में लाभ और हानि दोनों की सम्भावनाएँ होती हैं। यदि क्रय मूल्य ष् विक्रय मूल्य तब
लाभ होता है और जब क्रय मूल्य>विक्रय मूल्य, तब हानि होती है।

इस प्रकार लाभ=विक्रय मूल्य — क्रय मूल्य और हानि=क्रय मूल्य —विक्रय मूल्य। लाभ और हानि को प्रतिशत
में भी ज्ञात करते हैं।

9. लाभ-प्रतिशत = $\frac{\text{लाभ} \times 100}{\text{क्रय मूल्य}}$, हानि-प्रतिशत = $\frac{\text{हानि} \times 100}{\text{क्रय मूल्य}}$

अतः लाभ और हानि का प्रतिशत केवल क्रय मूल्य पर ही ज्ञात किया जाता है।

10. जब उपभोक्ता किसी व्यक्ति या संस्था से कोई धन एक निश्चित अवधि के लिए उधार लेता है और उसका
उपयोग करने के बदले में लिये गये धन के अतिरिक्त कुछ और धन वापस लौटाता है, उस अतिरिक्त धन को
ब्याज कहते हैं। इसके दो प्रकार होते हैंः

(1) साधारण ब्याज, (2) चक्रवृद्धि ब्याज

साधारण ब्याज = $\frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$

11. दैनिक जीवन में व्यावहारिक रूप से गणना करने की विधि को व्यवहार गणित कहते हैं। इसके अन्तर्गत
किसी वस्तु के मूल्यों की गणना सुविधानुसार छोटे-छोटे भागों में तोड़ कर की जाती

है। और अन्त में जोड़ लेते

हैं।

12. *जब कोई अपनी वस्तुओं या सेवाओं को देकर दूसरे से अपनी आवश्यकता की वस्तु या सेवा प्राप्त करता है,*

तो इस प्रणाली को विनिमय प्रणाली कहा जाता है।

13. *जब कोई धनराशि देकर अपनी आवश्यकता की वस्तु या सेवा प्राप्त करता है, वह मुद्रा विनिमय कहलाता*

हैं।

14. *मुद्रा की विशेषताएँ*

15. *बिल तथा कैशमेमो*

उत्तरमाला

अभ्यास 12 (a)

1. (i) 3 : 4, (ii) 5 : 3, (iii) 2 : 7, (iv) 7; **2.** (i) 2 : 5, (ii) 5 : 12, (iii) 13 : 75, (iv) 108 : 125; **3.** 53 : 65, 75 : 62, 48 : 55, 63 : 71; **4.** 29 : 25; **5.** 8, 13, 73 और 85; **6.** (i) 14 : 3, (ii) 17 : 15, (iii) 37 : 25, (iv) 67 : 65; **7.** (i) 3***प्रथम पद***; (ii) 4 ***प्रथम पद*, 11 *व्दितीय पद***; (iii) 13 ***प्रथम पद*, 27 *व्दितीय पद*।**

अभ्यास 12 (b)

1. (क) 3 : 2, (ख) 2 : 7, (ग) 2 : 7, **2.** (i) 1 : 2, (ii) 5 : 1, (iii) 1 : 30, (iv) 1 : 6, (v) 100 : 3,

(vi) 4 : 1; **3.**(i) 1 : 8, (ii) 1 : 5, (iii) 1 : 11, (iv)1 : 3, (v) 1 : 2, (vi) 100 : 13, **4.** (i) 5 : 8 > 3 : 5,

(ii) 6 : 8 > 2 : 7, (iii) 40**पैसे** : **रु** 2 > 60 **पैसे** : **रु** 4 ; **5.** (i) 4 : 1, (ii) 3 : 1, (iii) 3 : 4;

6. (a) (i) 2 : 3, (ii) 2 : 5; **(b)**7:3**;7.** (i) 5 : 3, (ii) 3 : 5, (iii) 3 : 2; **8.** (i) 64, (ii) 4, (iii) 12, (iv) 6 **.**

अभ्यास 12 (c)

1. (iv) ; **2.** (ii); **3.** (i) 5, (ii) 4, (iii) 75, (iv) 5; **4.** (i) *सत्य,* (ii) *असत्य,* (iii) *असत्य,* (iv) *सत्य;* **5.** 12 *मीटर* **6.** 63 *किग्रा;* 7 *दोनों के भाव समान हैं रु 7 प्रतिकिलो*

अभ्यास 12 (d)

1. (i) 18, (ii) 24, (iii) 47, (iv) 63; **2.** (i) 3/25, (ii) 3/20, (iii) 3/4, (iv) 7/20; **3.** (i) 25%, (ii) 15%, (iii) 40%, (iv) 75%; **4.** (1) $\frac{1}{4}$, (2) 75%, (3) $\frac{4}{25}$, (4) 40%

अभ्यास 12 (e)

1. (i) 0.25, (ii) 0.35, (iii) 0.30, (iv) 0.8; **2.** (i) 12%, (ii) 3%, (iii) 2.5%, (iv) 125%,

3. (1) 0.1, 10% (2) $\frac{3}{10}$, 30% (3) $\frac{4}{5}$, 0.8 (4) $\frac{2}{25}$, 8%; (5) $\frac{1}{20}$, 0.05

अभ्यास 12 (f)

1. (i) 75, (ii) 120, (iii) 54 *किग्रा,* (iv) 508.5 *लीटर;* **2.** (i) 33.3 %, (ii) 25%, (iii) 5%,

(iv)2.5%, **3.** 1125 *बच्चै,* **4.** 65%; **5.** 50%, **6.** 48 *बालिकाएँ*a, **7.** 700, **8.** 20%,

अभ्यास 12 (g)

1. (i) रु 18, (ii) 24 *किग्रा,* (iii) .375 *मीटर,* (iv) 937.5 *लीटर;* **2.** (i) $\frac{1}{5}$, (ii) 20%; **3.** (i) 20%, (ii) 37.5%, (iii) 12%, (iv) 160%; **4.** (i) 0.125, (ii) 0.45, (iii)0 .625, (iv)0.85; **5.** (i) 0.40, 40%, 40; (ii)$\frac{1}{25}$, 4%, 4 (iii) $\frac{81}{200}$, 0.405, 40.5; (iv) $\frac{2}{25}$, 0.08, 8%; **6.** (i) 20%, (ii) 25%, (iii) 30%, (iv) 4.2%; **7.** (ग) 26.25 *किमी प्रति घंटा;* **8.** (घ) 28^0C; **9.** (ख) रु 736; **10.** 360; **11.** *गणित मैं;* **12.** *पहले गाँव मैं;***13.** 60%, **14.** 250; **15.** 72 *सेब;* **16.** 10%; **17.** 5.6 *मीटर;* **18** 22000 *लो*

अभ्यास 12 (h)

1. (i) रु 15 , (ii) रु 1200, (iii) रु 550, (iv) रु 100; **2.** रु 200 ; **3.** रु 875 ;
5. रु 7600 ; **6.** रु 5000

अभ्यास 12 (i)

1. (i) रु 12, 6%, (ii) रु 20, 4%, (iii) रु 450, 10%, (iv) रु 25, 3.125 % (v) रु 1344, 12%; **2.** 10%; **3.** 33.3%; **4** $11\frac{1}{9}\%$. **5.** रु 396 ; **6.** रु 46800; **7.** रु 1000 ; **8.** रु 2350 ; **9.** रु 220 ; **10.** (क) 25% *लाभ*, (ख) 30% *लाभ*, (ग) $33\frac{1}{3}\%$ *हानि*; **11.** रु 200; **12.** 10% *की हानि*; **13.**25% *का लाभ*; **14.** (1) *असत्य*, (2) *असत्य*, (3) *सत्य*

अभ्यास 12 (j)

1. (क) *ब्याज*, (ख) *समय*, ; ग) *मूलधन*, (घ) *दर*, (च) 100; **2.** (i) 110, (ii) 25, (iii) 550, (iv) 120, **3.** (i) 8% *वार्षिक*, (ii) 5% *वार्षिक*, (iii) 6% *वार्षिक*; **4.** (i) रु 21 , (ii) रु 100 , (iii) रु 4; **5.** (क) *मूलधन*, (ख) *ब्याज*, (ग) *मिश्रधन*, (घ) *मूलधन*; **6.** 7% *वार्षिक*, **7.** रु 1920 ; **8.** रु 100 पर 1 वर्षका ब्याज रु 12.50 है; **9.** रु 60; **10.** रु 16,320 ; **11.** 15% *वार्षिक*

अभ्यास 12 (k)

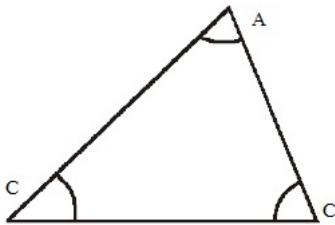
1. (ख) रु 70; **2.** (ग) रु 27; **3.** (क) 6.25; **4.** रु 743.75; **5.** 12042.250 *किग्रा* **6.** रु 1543.75; **7.** 247.50 *किमी*;

इकाई 13 त्रिभुज

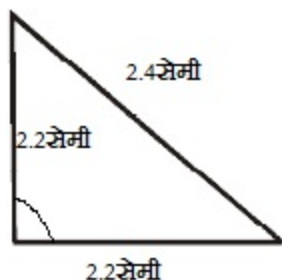
- *त्रिभुज के प्रकार*
- *त्रिभुज की रचना*
- *आकृतियों की सर्वांगसमता*
- *त्रिभुजों की सर्वांगसमता*
- *आकृतियों की समरूपता*
- *त्रिभुजों की समरूपता*

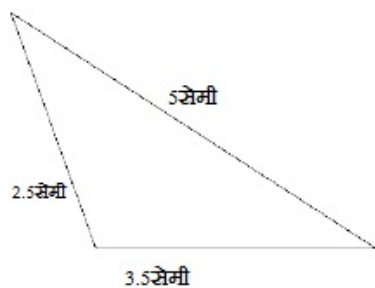
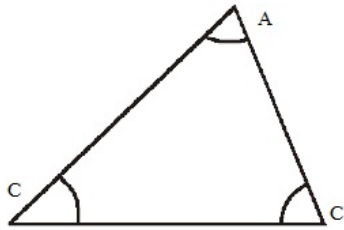
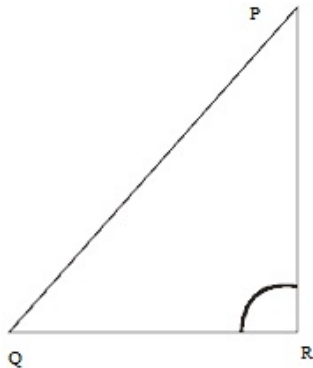
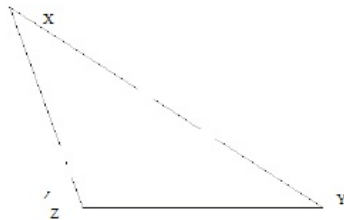
13.1 भूमिका :

आप अब तक ज्यामितीय अवधारणा के अन्तर्गत ठोस वस्तुओं के फलक और उनके फलकों के चारों ओर पेंसिल घुमाने से बनने वाले आयत, वर्ग, वृत्त, त्रिभुज, इत्यदि आकृतियों से अवगत हो चुके हैं। आइए, हम त्रिभुज के विषय में विस्तार से जानें।

13.2 त्रिभुज :

जैसा कि आप चित्र में देख रहे हैं ABC *एक त्रिभुज है जिसकी* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ *तीन भुजाएँ*, A,B,C *तीन शीर्ष और* ∠ BCA, ∠ ABC *और* ∠ CAB *तीन कोण हैं। अत: हम कह सकते हैं कि त्रिभुज, तीन रेखा खंडों से बनी एक बन्द सरल आकृति है, जिसके तीन शीर्ष, तीन भुजाएँ व तीन कोण होते हैं। इसे चिह्न '* Δ *' द्वारा दर्शाते हैं।*

आप पार्श्व में बने हुऐ चित्रों को देखें और भुजाओं की लम्बाई के आधार पर इनका वर्गीकरण करें।

चित्र (i) ***में हम देखते हैं कि इस*** Δ ***की दो भुजाएँ बराबर हैं, परन्तु तीसरी भुजा की लम्बाई भिन्न है, इसलिए इस प्रकार के त्रिभुज को समद्विबाहु त्रिभुज कहते हैं।***

चित्र (ii) ***को देखें और निष्कर्ष निकालें, इस त्रिभुज की तीनों भुजाएं बराबर हैं, अतः इसे समबाहु त्रिभुज कहते हैं।***

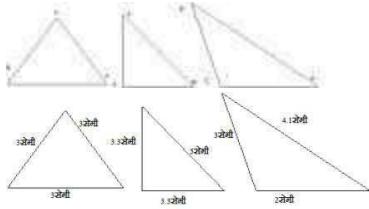
चित्र (iii) ***पर विचार करें, इस त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाई में कोई समानता नहीं हैं, इसलिए इस प्रकार के त्रिभुज को विषमबाहु त्रिभुज कहते हैं।***

यहाँ हमने देखा कि भुजाओं की लम्बाइयों के अनुसार त्रिभुज तीन प्रकार के होते हैं। आप कोण और इसके प्रकार के विषय में अध्ययन कर चुके हैं। अब हम आगे देखेंगे कि कोण के आधार पर त्रिभुज को कितने प्रकार से वर्गीकृत कर सकते हैं। आइए निम्नांकित चित्रों की सहायता से जानें।

(i) न्यून कोण

(ii)समकोण

(iii) अधिक कोण

चित्र (i) में Δ ABC का प्रत्येक कोण न्यून कोण है, इस प्रकार के त्रिभुज को न्यून कोण त्रिभुज कहते हैं।

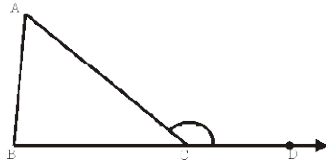
चित्र (ii) को देखें, इसमें $\angle$ QRP समकोण हैं, ऐसा त्रिभुज जिसका एक कोण समकोण है, समकोण त्रिभुज कहलाता है।

चित्र (iii) में $\angle$ XZY अधिक कोण है। अत: ऐसा त्रिभुज जिसका एक कोण अधिक कोण हो, अधिक कोण त्रिभुज कहलाता है।

प्रयास कीजिए

1. (i) Δ ABC बनाकर इसके अवयवों के नाम लिखिए। (ii) $\angle$ A के सामने की भुजा को लिखिए। (iii) भुजा AC के सामने का कोण लिखिए।

2. त्रिभुजों का वर्गीकरण कीजिए -

सोचिए एवं कीजिए :

आइए अब हम Δ के अन्य कोणों के विषय में जाने Δ ABC की भुजा $\overline{BC}$ को ब ढ़ाकर शीर्ष C पर बने कोण ACD परध्यान दीजिए। यह कोण Δ के बर्हिभाग में स्थित है। इसे हम Δ ABC के शीर्ष C पर बना एक बाह्यकोण कहते हैं।

स्पष्ट है कि ∠ BCA तथा ∠ ACD परस्पर संलग्न कोण हैं। इसी प्रकार भुजा $\overline{CA}$ तथा $\overline{AB}$. को ब ढ़ाकर क्रमश: कोण A और B के बाह्यकोणों को बना सकते हैं।

निष्कर्ष :

भुजाओं की दृष्टि से त्रिभुजों के प्रकार -

- वह त्रिभुज, जिसकी तीनों भुजाएँ समान हैं, समबाहु त्रिभुज कहलाता है।
- वह त्रिभुज, जिसकी केवल दो भुजाएं समान हैं, समद्विबाहु त्रिभुज कहलाता है।
- वह त्रिभुज, जिसकी कोई भुजाएँ समान नहीं हैं, विषमबाहु त्रिभुज कहलाता है।

कोणों की दृष्टि से त्रिभुजों के प्रकार -

- वह त्रिभुज जिसका एक कोण समकोण है, समकोण त्रिभुज कहलाता है।
- वह त्रिभुज, जिसका एक कोण अधिक कोण है, अधिक कोण त्रिभुज कहलाता है।
- वह त्रिभुज, जिसका प्रत्येक कोण न्यून कोण है, न्यून कोण त्रिभुज कहलाता है।

आपने विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों को देखा और बनाया है। इस इकाई में आप एक बहुत ही महत्वपूर्ण ज्यामितीय संकल्पना सर्वांगसमता सीखने जा रहे हैं, जो विशेष कर त्रिभुजों की सर्वांगसमता से संबन्धित है।

चित्रों की सर्वांगसमता (तल - आकृतियों कीसर्वांगसमता)

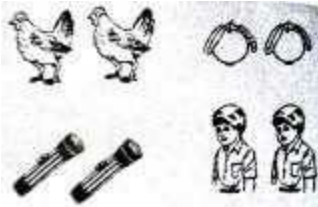
प्रयास कीजिए :

चित्रों को देखकर बताइए -

(i) कौन-कौन से चित्र परस्पर आकृति (रूप) में समान हैं?

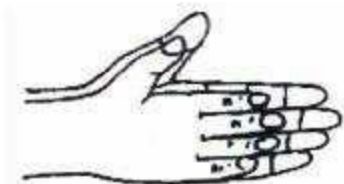
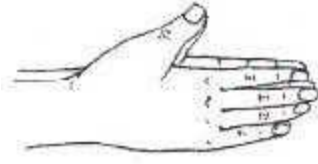
(ii) समान आकृति वाले चित्र क्याआकार (विस्तार) में भी परस्पर समान हैं?

इन्हें कीजिए :

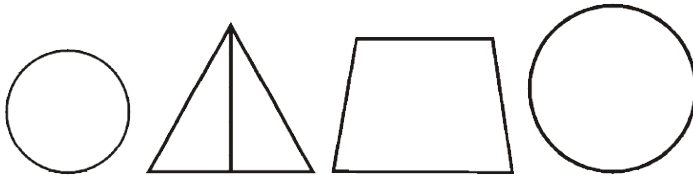
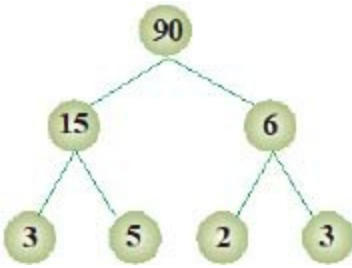
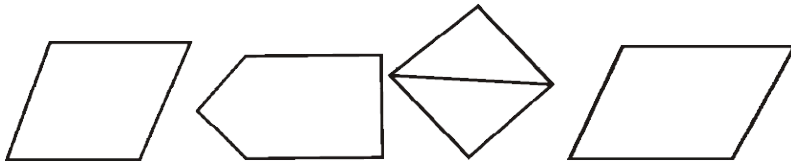
पार्श्वांकित आकृतियों को देखिए :

1.अपनी- अपनी एक हाथ की हथेली पर दूसरे हाथ की हथेली को इस प्रकार रखिए कि दोनों हाथ की हथेलियाँ एक दूसरे पर पूर्णत: आ जाएँ। क्याएक हथेली से दूसरी हथेली पूर्णत: ढँक गई है?

2. अपनी हथेली दूसरे सहपाठी की हथेली पर रखिए और देखिए कि एक हथेली दूसरे की हथेली से पूर्णत: ढँकती है या नहीं।

हमने देखा कि अपने एक हाथ की हथेली से दूसरे हाथ की हथेली पूर्णत: ढँक जाती है, जबकि एक शिक्षार्थी की हथेली से दूसरे शिक्षार्थी की हथेली पूर्णत: नहीं ढँकती है। इसका क्याकारण है?

एक ही शिक्षार्थी की दोनों हथेलियों की आकृतियाँ (रूप) एवं आकार समान होते हैं। इसलिए वे एक दूसरे को पूर्णत: ढँक पाती है।

दो शिक्षर्थियों की हथेलियाँ आकृति में समान होती हैं, परन्तु उनके आकार भिन्न-भिन्न होते हैं। इसलिए वे एक दूसरे को पूर्णत: नहीं ढक पाती हैं।

इन्हें कीजिए :

निम्नलिखित चित्रों कोध्यान से देखिए और इन्हें ट्रेसिंग पेपर पर बनाइए और प्रत्येक चित्र को काटकर अलग कीजिए तथा एक दूसरे पर रखिए।

हम देखते हैं कि चित्र (a) *और चित्र* (g) *आकृति और आकार में समान हैं। अत: चित्र* (a), *चित्र* (g) *पर रखने पर उसे पूर्णत ढॅक लेता है। इसी प्रकार चित्र* (b), *चित्र* (k) *को तथा चित्र* (d), *चित्र* (f) *को पूर्णत: ढॅक लेते हैं। चित्र* (c) *और चित्र* (j)*दोनो समान लगते हैं, परन्तु वे एक दूसरे को पूर्णत: नहीं ढॅक सकते हैं। इसी प्रकार चित्र* (e) *चित्र* (h) *को और चित्र* (i), *चित्र* (l) *को पूर्णत: नहीं ढॅकते हैं।*

जब दो आकृतियाँ एक दूसरे को पूर्णत: ढॅक लेती हैं, तो उन आकृतियो को सर्वांगसम कहते हैं।

चिह्न “≅” को सर्वांगसम पढ़ते हैं।

ध्यान दें

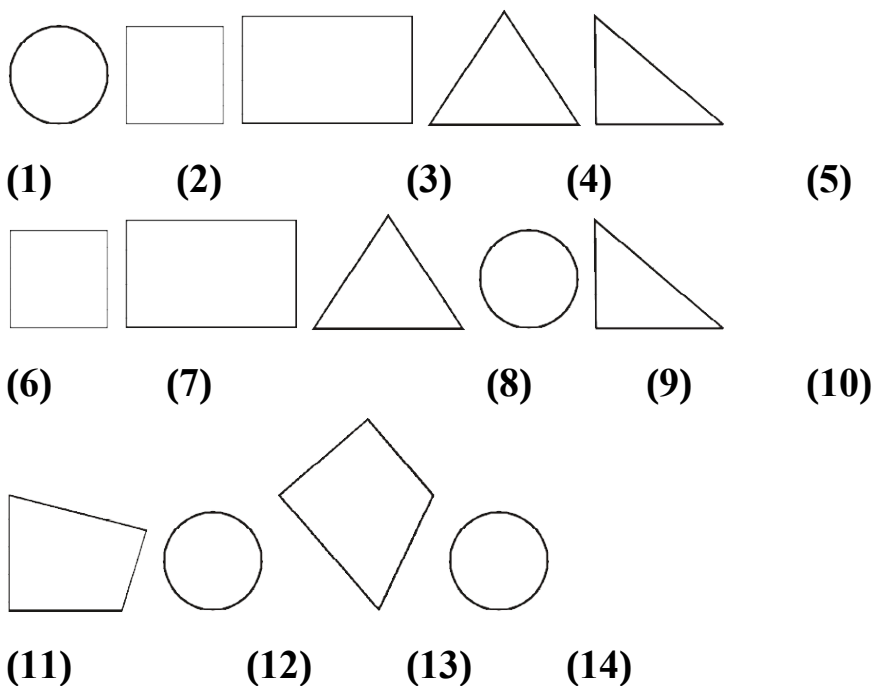
(i) ***दो रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं, यदि उनकी लम्बाई समान है।***

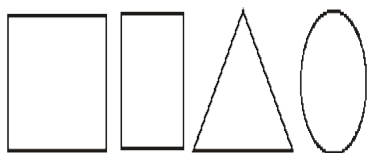
(ii) ***यदि दो कोणों के माप समान हैं, तो वे सर्वांगसम होते हैं।***

(iii) ***दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं, यदि उनकी त्रिज्याएँ समान हों।***

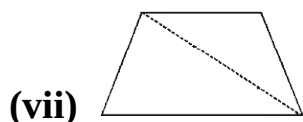
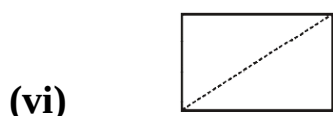
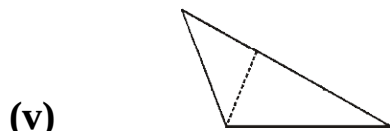
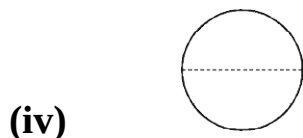
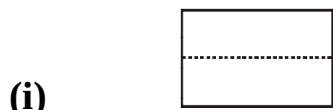
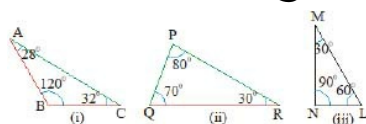
(iv) ***वे आकृतियाँ जो आकार*** (shape) ***और माप*** (Size) ***में समान होती हैं, सर्वांगसम होती हैं।***

प्रयास कीजिए

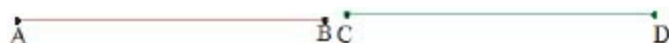
कुछ आकृतियों के क्रमांक दिये गये हैं। सर्वांगसम आकृतियों के क्रमांक छाँटकर एक साथ लिखिए:

अभ्यास 13 (a)

1.***निम्नांकित चित्रों को काटिए, प्रत्येक को दो भागों में इस प्रकार मोड़िए कि दोनों भाग सर्वांगसम हो जाएं।***

2. ***नीचे बने चित्रों को यदि बिन्दुदार रेखाओं पर दो भागों में मोड़ा जाए, तो प्रत्येक के***

दोनों भाग सर्वांगसम हैं या नहीं? अपनी अभ्यास पुस्तिका में प्रत्येक के समक्ष हाँ या नहीं में उत्तर लिखिए -

क्रमांक	चित्र	हाँ/नहीं
(i)		
(ii)		
(iii)	$\left(\frac{3}{20}\times100\right)$	
(iv)		
(v)		
(vi)		
(vii)		

3. निम्नलिखित त्रिभुजों को उनके कोणों के आधार पर वर्गीकृत कीजिए।

4. निम्नलिखित त्रिभुजों को उनके भुजाओं के आधार पर वर्गीकृत कीजिए।

0 1 2 3 4 5 6 7

5. नीचे दो रेखाखंड दिये गये हैं, दोनों रेखाखंड सर्वांगसम हैं। यदि AB = 4.5सेमी, तो CD की लम्बाई कितनी होगी?

6. चित्र में A, B, C, D एक रेखा पर स्थित बिन्दु हैं। रेखाखंड CA = रेखाखंड BD , तो रेखाखंड CB और AD बराबर हैं या नहीं ?

7. ***नीचे बने चित्र में*** $\angle AOB = \angle COD$, ***तो क्या*** $\angle AOC = \angle BOD$?

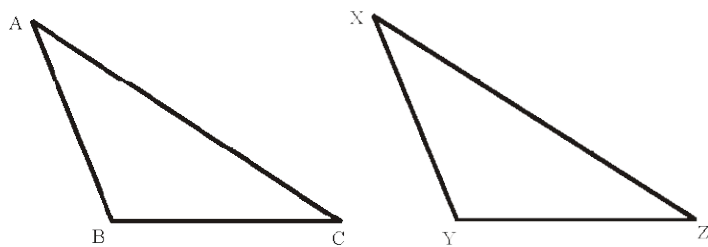
13.3 *त्रिभुजों की सर्वांगसमता*

इन्हें कीजिए :

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर एक त्रिभुज ABC ***बनाइए। ट्रेसिंग पेपर पर इसी त्रिभुज की दूसरी अनुकृति*** ΔXYZ ***बनाइए। इसे कैंची से काटकर*** ΔABC ***पर रखिए, और देखिए कि क्या वे एक दूसरे को ढक लेते हैं***? ***इस स्थिति में*** $\angle A = \angle X$, $\angle B = \angle Y$, $\angle C = \angle Z$, ***भुजा*** AB = ***भुजा*** XY, ***भुजा*** BC = ***भुजा*** YZ ***तथा भुजा*** AC = ***भुजा*** XZ

हमने देखा कि दोनों त्रिभुज आकृति (***रूप***) ***और आकार*** (***विस्तार***) ***में समान हैं। ये त्रिभुज एक दूसरे के सर्वांगसम हैं।***

- ***यदि दो त्रिभुज आकृति और आकार में समान हैं, तो वे सर्वांगसम होते हैं।***
- ***यदि*** ΔABC ***और*** ΔXYZ ***सर्वांगसम हैं तो उन्हें*** $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$ ***लिखते हैं।***
- ***वे शीर्ष,कोण और भुजाएँ जो एक दूसरे को पूर्ण रूप से ढक लेती हैं, क्रमश: संगत शीर्ष, संगत कोण और संगत भुजाएँ कहलाती हैं।***

उपर्युक्त ΔABC ***और*** ΔXYZ ***में संगत शीर्ष, संगत कोण और संगत भुजा बताइए।***

शीर्ष A ***का संगत शीर्ष*** X ***है, इसे*** ($A \leftrightarrow X$) ***लिखते हैं।***

शीर्ष B ***का संगत शीर्ष*** Y ***है, इसे*** ($B \leftrightarrow Y$) ***लिखते हैं।***

शीर्ष C का संगत शीर्ष Z है, इसे (C ↔ Z) लिखते हैं।

∠A का संगत कोण ∠X है।

∠B का संगत कोण ∠Y है।

∠C का संगत कोण ∠Z है।

भुजा AB की संगत भुजा XY है, इसे (AB ↔ XY) लिखते हैं।

भुजा BC की संगत भुजा YZ है , इसे (BC ↔ YZ) लिखते हैं।

भुजा AC की संगत भुजा XZ है, इसे (AC ↔ XZ) लिखते हैं।

हमने देखा :

यदि △ABC ≅ △ XYZ तो उनके संगत कोण और संगत भुजाएं बराबर हैं।

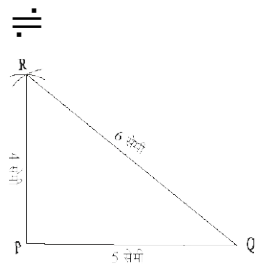
एक चित्र को काटकर दूसरे चित्र पर रखने की विधि को अध्यारोपण (Superposition) कहते हैं। इस विधि से दो दिये गये चित्रों की सर्वांगसमता और सर्वांगसम नहीं है, की जांच कर सकते हैं।

त्रिभुज की रचना जबकि तीनों भुजाएँ ज्ञात हों (SSS) :

इन्हें ज्ञात कीजिए

एक त्रिभुज PQR की रचना कीजिए जिसकी भुजा PQ = 5 सेमी, QR = 6 सेमी, RP = 4 सेमी।

रचना :

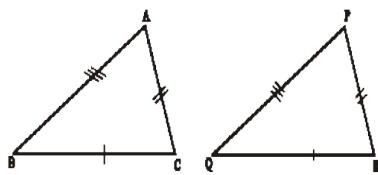
≑

- रेखाखण्ड PQ = 5 सेमी खींचिए।
- परकार की सूई की नोक को भुजा PQ के बिन्दु Q पर रखकर 6 सेमी त्रिज्या का एक चाप लगाइए।
- इसी प्रकार RP = 4 सेमी के बराबर परकार से लम्बाई लीजिए।

- ***परकार की सूई की नोक को भुजा*** PQ ***के बिन्दु*** P ***पर रखकर एक चाप लगाइए।***
- ***दोनों चाप एक दूसरे को जहाँ पर काटते हैं उसे बिन्दु*** R ***अंकित कीजिए।***
- ***बिन्दु*** R ***को बिन्दु*** Q ***से और बिन्दु*** P ***से मिलाइए। यही अभीष्ट त्रिभुज*** PQR ***है।***

सर्वांगसमता की जाँच

क्रिया कलाप :

- ***त्रिभुज*** PQR ***के ऊपर ट्रेसिंग पेपर रखकर दूसरा त्रिभुज*** ABC ***बनाइए। दोनो त्रिभुजों*** △ PQR ***और*** △ABC ***को काटकर एक दूसरे पर रखिए और देखिए कि वे एक दूसरे को पूर्ण रूप से ढॅक लेते हैं या नहीं। त्रिभुज*** ABC ***की भुजाएँ नापिए और देखिए कि दोनों त्रिभुजों की भुजाओं में क्यासम्बन्ध है।***
- ***कागज के एक पन्ने पर त्रिभुज*** △ABC***बनाइए जिसमें*** AB = 5 ***सेमी***, BC = 6.0 ***सेमी***, ***और*** CA = 3 ***सेमी।***
- ***दूसरा त्रिभुज***△PQR ***बनाइए जिसमें*** PQ = 5 ***सेमी***, QR = 6.0 ***सेमी***, ***और*** RP= 3 ***सेमी।***
- ***इन दोनों त्रिभुजों को काटकर अलग कीजिए।***
- ***एक त्रिभुज को दूसरे त्रिभुज पर इस प्रकार रखिए कि भुजा*** AB ***भुजा*** PQ ***पर***, ***भुजा*** BC ***भुजा*** QR ***पर और भुजा*** CA ***भुजा*** RP ***पर पड़े।***
- ***क्याएक त्रिभुज ने दूसरे त्रिभुज को पूरा ढॅक लिया*** ?

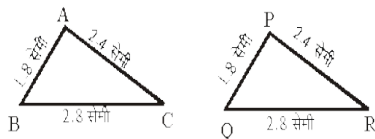
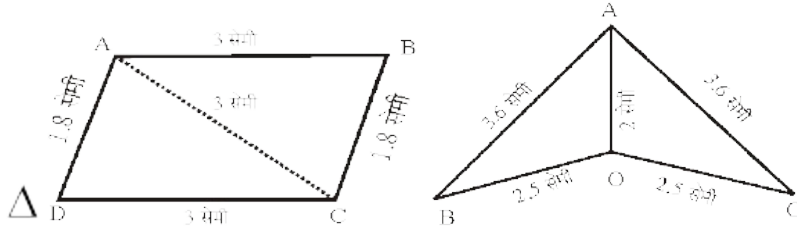
यदि दोनों त्रिभुज एक दूसरे को पूरा-पूरा ढॅक लेते हैं, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

(SSS) *चित्र*

यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे भुजा-भुजा-भुजा

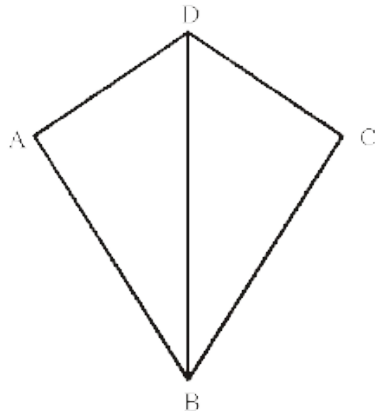
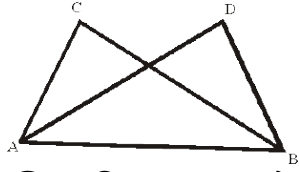
सर्वांगसमता अथवा संक्षेप में भु0 भु0 भु0 सर्वांगसमता कहते हैं। अत:
$\triangle$ ABC$\cong$ $\triangle$ PQR

***अभ्यास* 13 (b)**

1. *एक त्रिभुज* ABC *खींचिए*, *जिसकी भुजा* AB = 6 *सेमी*, *भुजा* BC = 8 *सेमी और* AC = 8 *सेमी*

2. *निम्नांकित त्रिभुजों के जोड़े में भुजाओं के नाप अंकित हैं। भुजा-भुजा-भुजा सर्वांगसमता प्रतिबंध का प्रयोग करके बताइए, कौन त्रिभुज किस त्रिभुज के सर्वांगसम है, उत्तर को सांकेतिक भाषा में लिखिए।*

3. *पार्श्वांकित चित्र में* AD = DC *और* AB = BC

(i)*क्या* $\triangle$ ABD $\cong$ $\triangle$ CBD ?

(ii)*यदि* $\triangle$ABD $\cong$ $\triangle$CBD, *तो इसके संगत भुजाओं और संगत कोणों को लिखिए।*

4. *पार्श्वांकित चित्र में*, $\triangle$ABC *और* $\triangle$ABD, *एक ही भुजा* AB *पर बने त्रिभुज हैं।* AC = BD *तथा* BC = AD *है।*

निम्नांकित कथन में कौन सत्य/असत्य हैं?

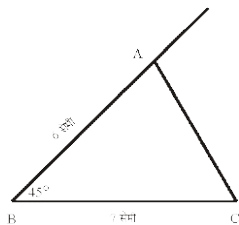
(i) △ ABC ≅ △ ABD

(ii)△ABC ≅ △ ADB

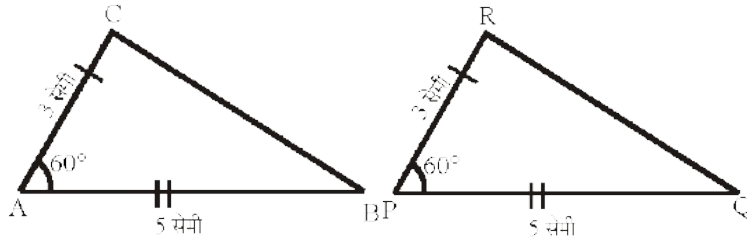
(iii) △ABC ≅ △ BAD

13.5 *त्रिभुज की रचना जब कि दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण ज्ञात हों :* (SAS)

एक त्रिभुज ABC ***खींचिए, जिसकी भुजा*** AB = 6 ***सेमी, भुजा*** BC = 7 ***सेमी और*** ∠B = 45°

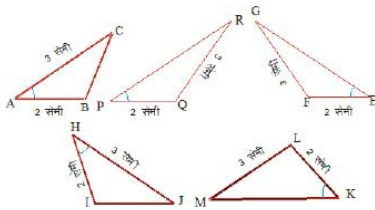
रचना :

- 7 ***सेमी लम्बाई का रेखाखंड*** BC ***खींचिए।***
- ***बिन्दु*** B ***पर चाँदा की सहायता से*** 45° ***का कोण बनाती हुई एक किरण खीचिए।***
- ***इस किरण पर बिन्दु*** B ***से*** 6 ***सेमी की दूरी पर बिन्दु*** A ***पर चिह्न लगाइए।***
- ***बिन्दु*** A ***और*** C ***को मिलाइए यही*** △ ABC ***अभीष्ट त्रिभुज है।***

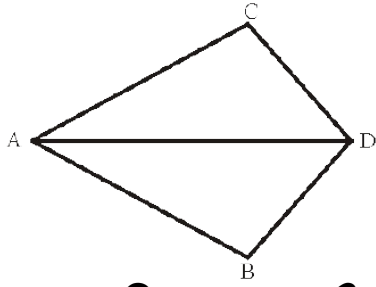
सर्वांगसमता की जाँच

इस त्रिभुज ABC ***पर ट्रेसिंग पेपर रखकर दूसरा त्रिभुज*** PQR ***बनाइए।*** △ PQR ***को काटकर*** △ ABC ***पर रखिए और देखिए कि दोनों एक दूसरे को पूर्ण रूप से ढॅक लेते हैं या नहीं। दूसरे त्रिभुज*** PQR ***की भुजाएँ और बीच का कोण नापिए तथा देखिए कि दोनों त्रिभुजों की भुजाओं और बीच के कोण में क्या सम्बन्ध है?***

- ***एक*** Δ ABC ***बनाइए जिसमें*** AC = 3.0 ***सेमी***, AB = 5.0 ***सेमी***, ***और*** ∠ A= 60°
- ***एक दूसरा त्रिभुज*** Δ PQR ***भी बनाइए जिसमें*** PQ = 5 ***सेमी***, PR = 3 ***सेमी***, ***और*** ∠P = 60
- ***इन त्रिभुजों को कटिए और एक दूसरे पर रखिए। क्यादोनों त्रिभुजों ने एक-दूसरे को ढॅक लिया है*** ? ***यदि दोनों त्रिभुज एक दूसरे को पूर्णत: ढॅक लेते हैं, तो दोनो त्रिभुज सर्वांगसम हैं।*** Δ ABC ≅ Δ PQR

यदि दो त्रिभुजों की दो संगत भुजाएँ और उनके बीच के कोण समान हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसमता रुरुभु0 ***को***0 ***भु***0" ***सर्वांगसमता कहते हैं।***

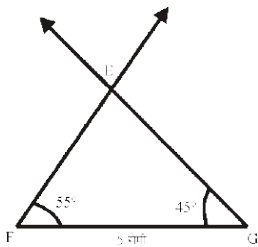
अभ्यास **13 (c)**

1. ***चित्र में दो त्रिभुज आपस में सर्वांगसम हैं, उन्हें छाँट कर सांकेतिक भाषा में लिखिए*** :

2. ***एक त्रिभुज*** △ABC ***की रचना कीजिए जिसमें*** AB = 6 ***सेमी***, AC= 6 ***सेमी और*** ∠ A= 90°, ***त्रिभुज*** XYZ ***की रचना कीजिए जिसमें*** XY = 6 ***सेमी*** ∠ X = 90° ***और*** ∠ Y = 45°, ***क्या दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं***?

3. ***पार्श्वांकित चित्र में*** AB = AC ***और*** ∠ DAB = ∠ CAD lees ***क्या*** △ABD ***और*** △ADC ***सर्वांगसम हैं***? ***यदि हैं तो क्यों***?

4. ***एक त्रिभुज*** ABC ***की रचना कीजिए जिसमें*** AC = 4.5 ***सेमी***, BC= 6 ***सेमी और*** ∠ C= 60°

13.6 *त्रिभुज की रचना जबकि दो कोण और संगत भुजा ज्ञात हों* (ASA)

△EFG ***की रचना कीजिए जिसमें*** FG = 5 ***सेमी***, ∠F= 55° ***और*** ∠G= 45° ***हो***

रचना :

5 ***सेमी लम्बाई का रेखाखंड*** FG ***खीचिए।***

बिन्दु F ***से*** 55° ***का कोण बनाती हुए एक किरण खीचिए।***

बिन्दु G ***से*** 45° ***का कोण बनाती हुए दूसरी किरण खीचिए।***

दोनों किरण एक दूसरे को बिन्दु E ***पर काटती हैं।***

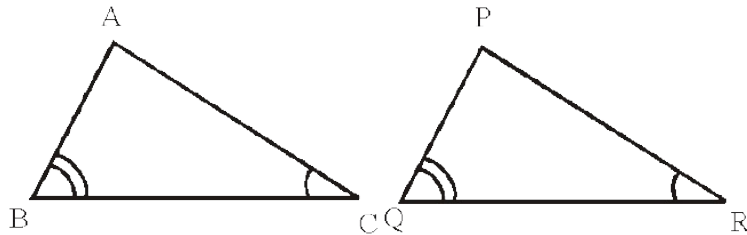
△EFG***अभीष्ट त्रिभुज है।***

सर्वांगसमता की जाँच :

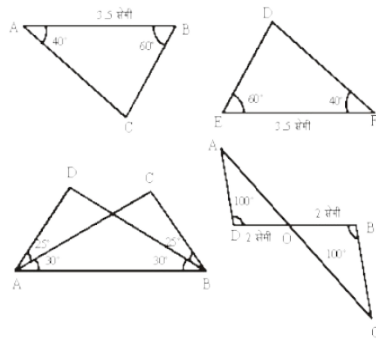
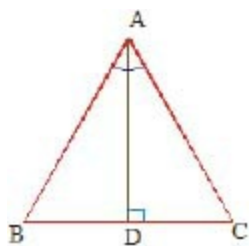
क्रिया कलाप :

इस त्रिभुज पर ट्रेसिंग पेपर रखकर दूसरा △ ABC ***बनाइए।*** △ ABC ***को काटकर*** △ EFG ***पर रखिए, और देखिए कि क्या दोनों त्रिभुजों ने एक दूसरे को पूर्ण रूप से ढक लिया है***? ***दूसरे त्रिभुज*** ABC ***की भुजा*** BC ***तथा*** ∠ B ***और*** ∠ C ***को नापिए और देखिए कि दोनों त्रिभुजों की भुजा*** FG ***और*** BC, ***कोणों*** ∠ F ***और*** ∠ B ***तथा*** ∠ G ***और*** ∠ C ***में क्या सम्बन्ध है***?

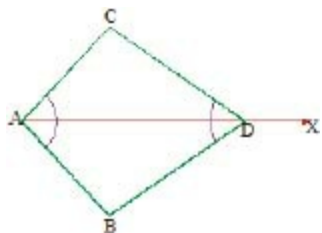
एक त्रिभुज ABC ***बनाइए जिसकी भुजा*** BC = 5.0 ***सेमी*** ∠ B = 45°,∠C = 30° ***एक***

दूसरा त्रिभुज PQR **बनाइए, जिसकी भुजा** QR= 5 **सेमी,** $\angle$ Q = 45° $\angle$R = 30° $\triangle$ ABC **को काटकर** $\triangle$ PQR **पर रखिए यदि त्रिभुज** $\triangle$ ABC **ने** $\triangle$ PQR **को पूरा - पूरा ढक लिया तो** $\triangle$ ABC **और** $\triangle$ PQR **त्रिभुज सर्वांगसम हैं।** $\triangle$ABC $\cong$ $\triangle$PQR

यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण और संगत भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते है। इसे को0 **भु**0 **को**0 (A.S.A.)**सर्वांगसमता कहते है।**

अभ्यास 13 (d)

1.**निम्नलिखित त्रिभुजों में कौन - सा त्रिभुज किस त्रिभुज के सर्वांगसम हैं** :

2. चित्र में AD, $\angle$A **की अर्धक है, तथा** AD $\perp$ BC

(i) **क्या** $\triangle$ADB $\cong$ $\triangle$ ADC ?

(ii)**क्या यह कहना सही है कि** BD = DC ?

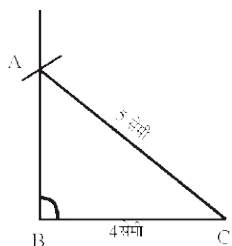
3. चित्र में रेखा AX, $\angle$CAB **और** $\angle$BDC **को समद्विभाजित करती है। उन तीन तथ्यों को बताइए जो यह सिद्ध करें कि**

△ ABD ≅ ≅ △ ACD

4. ***त्रिभुज*** ABC ***की रचना कीजिए, जिसकी भुजा*** AC = 6 ***सेमी,*** ∠A = 60° ***और*** ∠C = 45°

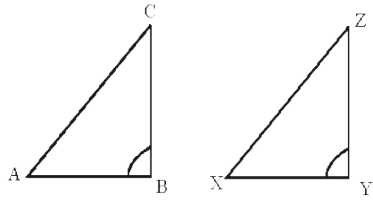
13.7 *समकोण त्रिभुज की रचना करना जब कि इसका कर्ण व एक भुजा ज्ञात हो* (R.H.S.):

इन्हें कीजिए :

समकोण △ABC ***की रचना कीजिए, जिसकी भुजा*** BC = 4 ***सेमी, कर्ण*** AC =5 ***सेमी और*** ∠B = 90°

रचना

- 4 ***सेमी लम्बाई का रेखाखंड*** BC ***खींचिए।***
- ***बिन्दु*** B ***पर*** 90° ***का कोण बनाती हुई किरण खींचिए।***
- AC = 5 ***सेमी के बराबर परकार में लम्बाई लीजिए।***
- ***परकार के सूई की नोक को भुजा*** BC ***के बिन्दु*** C ***पर रखकर एक चाप लगाइए।***
- ***यह चाप*** 90° ***का कोण बनाने वाली रेखा को जिस बिन्दु पर काटे उसे बिन्दु*** A ***लिखिए।***
- ***बिन्दु*** C ***को बिन्दु*** A ***से मिलाइए।*** △ ABC ***अभीष्ट त्रिभुज है।***

सर्वांगसमता की जाँच

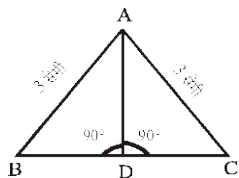
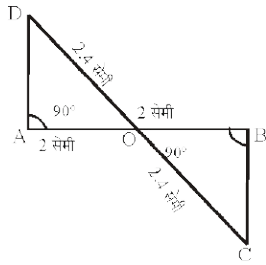
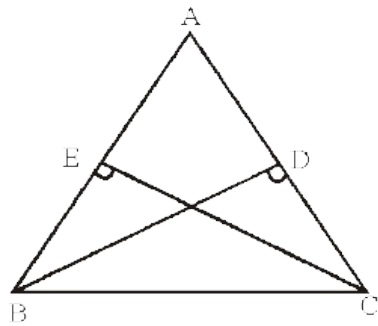
प्रयास कीजिए

एक △ABC *बनाइए।इस त्रिभुज पर ट्रेसिंग पेपर रखकर दूसरा* △ABC *बनाइए।* △ ABC *को काट कर* △ ABC *पर रखिए और देखिए कि क्या दोनों त्रिभुज एक दूसरे को पूर्ण रूप से ढॅक लेते हैं*? *दोनों त्रिभुजों की भुजाओं को नपिये और देखिये कि दोनों त्रिभुज की भुजाओं में क्या सम्बन्धहै*?

एक समकोण त्रिभुज △ *खीचिए*, *जिसमें कर्ण* AC = 7 *सेमी*, ∠B = 90°, *भुजा* AB = 4 *सेमी एक दूसरा त्रिभुज* XYZ *खीचिए*, *जिसमें कर्ण* XZ= 7 *सेमी भुजा* ZY = 4 *सेमी*, ∠Y = 90° ।

इसकी सर्वांगसमता का परीक्षण कीजिए।

यदि एक समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा, दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे समकोण -कर्ण- भुजा* (R.H.S.) *सर्वांगसमता कहते हैं।

अभ्यास 13(e)

1.*नीचे कुछ त्रिभुज के जोड़े दिये गये हैं। उनकी नाप भुजाओं के साथ लिख दी गई है। रुसमकोण -कर्ण - भुजा' सर्वांगसमता का प्रयोग करके बताइए कि कौन-कौन से त्रिभुज सर्वांगसम हैं*? *परिणाम को सांकेतिक रूप में लिखिए।*

2. BD ***और*** CE, △ ABC ***की भुजाओं*** AC ***और*** AB ***पर क्रमश: लम्ब खींचे गये हैं और*** BD = CE

(i) ***क्या*** △ DBC ≅ △ ECB ?

(ii) ***भुजा*** EB ***और भुजा*** CD ***में क्या सम्बन्ध होगा*** ?

3. उस प्रतिबन्ध को अभ्यास पुस्तिका पर लिखिए जबकि दो समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होंगे।

त्रिभुज के तीनों कोणों का योगफल

इसे कीजिए तथा निष्कर्ष निकलिए :

कोई तीन त्रिभुज △ABC, △ DEF ***और*** △ PQR ***बनाइए, इसके कोणों को किसी भी क्रम में*** ∠1, ∠2, ∠3 ***से प्रदर्शित कीजिए। प्रत्येक त्रिभुज के कोणों को नापिए और उनके योग कीजिए तथा अपनी अभ्यास पुस्तिका में निम्नलिखित सरिणी को पूरा कीजिए।***

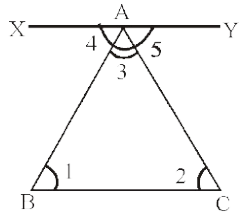
त्रिभुज	कोणों के नाप ∠1 ∠2 ∠3	योग ∠1 + ∠2 + ∠3
ABC		
DEF		
PQR		

निष्कर्ष :

हमने देखा त्रिभुज के तीनोंअन्त: कोणों का योगफल 180° होता है।

त्रिभुज के तीनों अन्त: कोणों का योगफल 180° होता है, इसका सत्यापन निम्न प्रकार से भी कीजिए।

एक △ABC बनाइए। बिन्दु A से BC || XY खींचिए।

चित्रानुसार कोणों को 1, 2, 3, 4 और 5 से प्रदर्शित कीजिए।

$\angle 4 = \angle 1$ (क्यों)

$\angle 5 = \angle 2$ (क्यों)

$\angle 3 = \angle 3$ (क्यों)

दोनों पक्षों को जोड़िए।

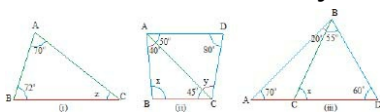
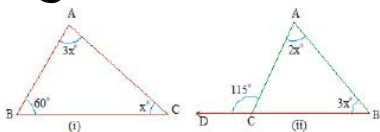
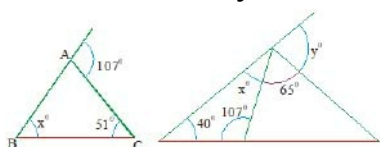
हमने देखा

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 3 + \angle 5 = 180°$

या $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

त्रिभुज के तीनों अन्त: कोणों का योगफल 180° होता है।

अभ्यास 13(f)

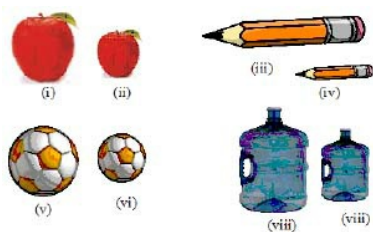
1. निम्नलिखित प्रश्नों में x, y, z का मान निकालिये

2. चित्रानुसार x का मान ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित में x, y का मान ज्ञात कीजिए।

4. *त्रिभुज* ABC *में* ∠B=72°, ∠B=64°, ∠A *को ज्ञात कीजिए।*

5. *यदि किसी त्रिभुज की कोणों में अनुपात* 3:4:5 *हो, तो कोणों को ज्ञात कीजिए।*

समरूपता की अवधारणा

आपने पढ़ा कि दो सर्वांगसम आकृतियाँ, समान आकृति (shape) *और समान माप* (size) *की होती हैं। प्रकृति में कुछ ऐसी आकृतियाँ हैं जो आकृति में समान रूप की होती हैं किन्तु समान माप की नहीं होती।*

निम्नलिखित चित्रों को ध्यान से देखें।

चित्र (i), (ii) *में देखते हैं कि दोनों चित्र सेव के हैं परन्तु दोनों आकार में भिन्न-भिन्न हैं। इसी प्रकार चित्र* (iii), (iv) *में देखते हैं कि दोनों चित्र पेंसिल के हैं। परन्तु दोनों आकार में भिन्न-भिन्न हैं।*

चित्र (v), (vi) *में देखते हैं कि दोनों चित्र पुâटबॉल के हैं परन्तु दोनों आकार में भिन्न-भिन्न हैं। चित्र* (vi), (viii) *में देखते हैं कि दोनों चित्र बोतल के हैं परन्तु दोनों आकार में भिन्न हैं।*

अत: हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि उपर्युक्त चित्रों के जोड़े रूप में समान हैं परन्तु आकार में भिन्न हैं।

ऐसी आकृतियाँ, जो रूप में समान होते हैं, समरूप आकृतियाँ (similar shapes) *कहलाती हैं।*

निम्नलिखित को देखें और बताइये कि उसमें क्या सम्बन्ध है ?

१. *किसी हॉकी के दो भिन्न आकार के चित्रों को* ?

२. *किसी पेड़ के दो भिन्न आकार के चित्रों को* ?

३. *हम देखते हैं कि सभी चित्रों की आकृतियाँ एक सी हैं परन्तु आकार भिन्न-भिन्न हैं।*

ध्यान दें -

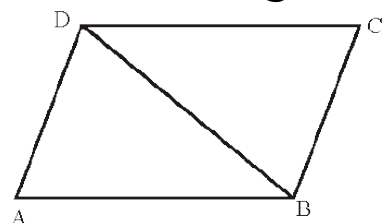
दो सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप होती हैं, परन्तु यह आवश्यक नहीं है कि

दो समरूप आकृतियाँ सर्वांगसम हो।

प्रयास कीजिए

तीन समबाहु त्रिभुज खीचिये जिनकी भुजाए 3.0 सेमी, 4.0 सेमी एवं 5.0 सेमी। बताइये कि तीनों त्रिभुज समरूप होंगे या सर्वांगसम होंगे।

दक्षता अभ्यास13

1. **चित्र में** $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ **को देखकर निम्नांकित वैकल्पिक उत्तरों में सही उत्तर छाँटकर अभ्यास पुस्तिका पर लिखिए।**

(i) $\angle A$ **का संगत कोण है** -

(i) $\angle A$ (ii) $\angle D$ (iii) $\angle C$

(ii) **भुजा** AB **की संगत भुजा है** :

(i) CD (ii) AD (iii) BC

(iii) AD **की संगत भुजा है** :

(i) CB (ii) CD (iii) BA

(iv) DB **की संगत भुजा है** :

(i) BD (ii) DC (iii) BC

2. **यदि कक्षा** 6 **के सभी शिक्षार्थी** 4 **सेमी,** 5 **सेमी और** 6 **सेमी भुजा वाले एक त्रिभुज की रचना करें, तो क्याबनने वाले सभी त्रिभुज सर्वांगसम होंगे** ?

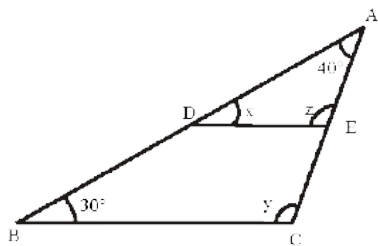
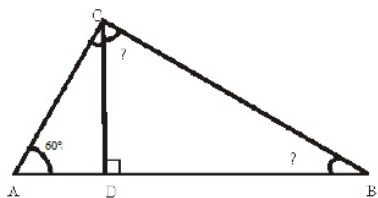
3. **यदि** $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ **तथा** AB = 3.2 **सेमी,** BC = 5 **सेमी और** CA = 7 **सेमी हों, तो** $\triangle PQR$ **की भुजाओं की नाप लिखिए।**

4. **एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों संगत भुजाओं के बराबर हैं, क्या दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं**?

5. **एक त्रिभुज के तीनों कोण दूसरे त्रिभुज के तीनों कोणों के बराबर हों, तो क्या दोनों त्रिभुज स दैव सर्वांगसम होते हैं**?

6. ***एक त्रिभुज का एक कोण*** 130° ***का है, शेष दो कोण आपस में बराबर हैं। इन दोनों कोणों की माप ज्ञात कीजिए।***

7. ***एक समकोण त्रिभुज के दो कोण बराबर हैं, दोनों कोण कितने-कितने अंश के हैं*** ?

8.***पार्श्वांकित चित्र में बिन्दु*** D, E, ***त्रिभुज*** ABC ***की भुजा*** AB ***और*** AC ***पर इस प्रकार स्थित हैं कि*** DE || BC, ***यदि*** ∠B = 30°, ∠A = 40° ***तो कोण*** x,y,z ***और के मान ज्ञात कीजिए।***

9. ***पार्श्वांकित चित्र में*** ∠C ***समकोण है।*** CD ⊥ AB ***है।*** ∠A = 65°, ***तो निम्नांकित कोणों के मान ज्ञात कीजिए।***

(i) ∠ACD

(ii)∠BCD

(iii) ∠CBD

विशेष प्रश्न : ***एक त्रिभुज का क्षेत्रफल उस वर्ग के बराबर है जिसकी भुजा*** 25 ***मीटर है। त्रिभुज के उस भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए जो शीर्ष बिन्दु से*** 10 ***मीटर दूर है*** :

N.T.S.2009

(1) 25 ***मीटर***

(2) 55 ***मीटर***

(3) 125 ***मीटर***

(4) 75 ***मीटर*** (3) 125 ***मीटर***

इस इकाई में हमने क्या सीखा :

1. रेखाखण्डों से बनी बन्द आकृति को बहुभुज कहते हैं।
2. वह बहुभुज जो तीन रेखाखंडों से बना हो, त्रिभुज कहलाता है।
3. त्रिभुज सबसे कम भुजाओं वाला बहुभुज है।
4. जब दो आकृतियाँ एक दूसरे को पूर्णत: ढ़क लेती हैं, तो वे आकृतियाँ सर्वांगसम होती है।
5. वे आकृतियाँ जो आकार और माप में समान होती हैं, सर्वांगसम होती है।
6. दो रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं, यदि उनकी लम्बाई समान है।
7. यदि दो कोणों के माप समान हैं, तो वे सर्वांगसम होते है।
8 यदि दो त्रिभुज आकृति और आकार में समान हैं, तो वे सर्वांगसम होते हैं।
9. यदि △ABC और 3△XYZ सर्वांगसम हैं तो उन्हें △ABC ≅ △ XYZ लिखते है।
10. सर्वांगसम त्रिभुजों के शीर्ष, कोण और भुजाएं जो एक दूसरे को पूर्ण रूप से ढंक लेती हैं, क्रमश: संगत शीर्ष, संगत कोण और संगत भुजाएं कहलाती है।
11. यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएं दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते है। संक्षेप में इसे भु0 भु0 भु0 (SSS)सर्वांगसमता कहते हैं।
12. यदि दो त्रिभुजों की दो संगत भुजाएं और उनके बीच के कोण समान हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे भु0 को0 भु0 (SAS) सर्वांगसमता कहते है।
13. यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण और संगत भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे को0 भु0 को0 (ASA) सर्वांगसमता कहते हैं।
14. यदि एक समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे स0क0भु0 (RHS) सर्वांगसमता कहते हैं।
15. त्रिभुज के तीनोंअन्त: कोणों का योगफल 180° होता है।
16. सभी सर्वांगसम त्रिभुज समरूप होते हैं, लेकिन समरूप त्रिभुज सर्वांगसम नहीं होते हैं।

उत्तरमाला

अभ्यास 13 (a)

2. (i)हाँ (ii) नहीं (iii)हाँ (iv) हाँ (v) नहीं (vi) हाँ (vii) नहीं

3.(i) अधिक कोण (ii) न्यून कोण (iii) सम कोण

4.(i) समद्विबाहु (ii) विषमबाहु (iii) विषमबाहु (iv)समबाहु

5.CD = 4.5 सेमी, 2. हाँ, 3. हाँ

अभ्यास 13 (b)

1.Δ ABC ≅ Δ CDA, Δ AOB ≅ Δ AOC, Δ ABC ≅ Δ PQR, 2. (i)हाँ (ii) AD ↔ CD, AB ↔ CB, DB ↔ DB, <A↔ <C, <CBD ↔<ABD, <CDB ↔<ADB; 3. (iii) सत्य

अभ्यास 13 (c)

1.Δ ABC ≅ Δ HIJ, Δ PQR ≅ Δ EFG ≅ Δ KLM, 2. हाँ; 3. हाँ

अभ्यास 13 (d)

1.Δ ABC ≅ Δ FED, Δ ADB ≅ Δ BCA, Δ ADO ≅ Δ CBO, 2. (i)हाँ , (ii)हाँ;

3.AB= AC, BD = CD और AD उभयनिष्ठ

अभ्यास 13 (e)

1.Δ ABC ≅ Δ BAD, Δ ADB ≅ Δ ADC, Δ AOD ≅ Δ BOC; 2. हाँ, बराबर है

अभ्यास 13(f)

1. (i) z = 380 (ii) x = 950, y = 500 (iii) x = 650

2. (i) x = 300 (ii) x = 230 3. (i) x = 500 (ii) x = 330, y = 820

4. (i) 440 5. 450, 600, 750

दक्षता अभ्यास 13

1.(i)<C (ii) भुजा CD (iii) भुजा BC (iv) भुजा BD 2.हाँ 3. PQ = 3.2 सेमी, QR = 5 सेमी, PR= 7 सेमी 4.हाँ 5. नहीं 6. 25°, 25° 7. 45°,45°, 8.x = 30°,y = z = 110° 9. (i)25° (ii)65° (iii) 25°

इकाई 14 वृत्त

- वृत्त की अवधारणा
- वृत्त की त्रिज्या, व्यास, जीवा तथा चाप
- अर्धवृत्त
- वृत्तखंड एवं त्रिज्यखंड

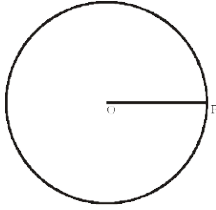
14.1 भूमिका :

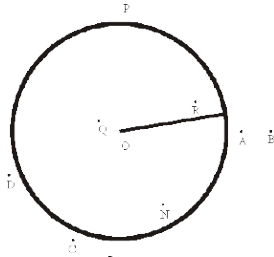
आपने विभिन्न प्रकार की ज्यामितीय आकृतियों के विषय में पढ़ा है। आज हम एक ऐसी आकृति के विषय में अध्ययन करेंगे जो अनेक विशिष्टताओं से युक्त है। यह हमारे जीवन के लिए बहुत उपयोगी है।

14.2 क्रिया कलाप :

एक धागे के एक सिरे पर पेंसिल बाँध दें और दूसरे सिरे को कागज के एक बिन्दु पर स्थिर रखकर पेंसिल को इस प्रकार घुमाएँ कि धागा तना रहे। हम देखते हैं कि इस दशा में भी एक वृत्त बनता है। स्थिर बिन्दु को वृत्त का केन्द्र तथा स्थिर बिन्दु से पेंसिल तक की लम्बाई को वृत्त की त्रिज्या कहते है। पार्श्व चित्र में O वृत्त का केन्द्र और OP वृत्त की त्रिज्या है।

निर्मित वक्र वृत्त है जो एक समतल में एक निश्चित बिन्दु से समान दूरी पर स्थित सभी बिन्दुओं का समूह है।

निश्चित बिन्दु OP वृत्त का केन्द्र (Centre) है। रेखाखण्ड OA वृत्त की त्रिज्या (Radius) तथा रेखाखण्डAB वृत्त का व्यास (Diameter) है

14.3 *वृत्त के अन्तः तथा बाह्य क्षेत्र* (Interior region and exterior region of Circle)

वृत्त को छोड़कर वृत्त के अन्तर का भाग वृत्त का अन्त:क्षेत्र तथा वृत्त को छोड़कर वृत्त का बाह्यभाग वृत्त का बाह्यक्षेत्र कहलाते हैं।

आओ पता लगाएँ

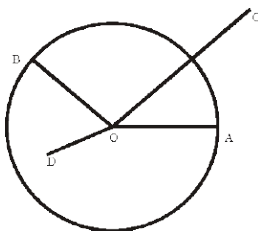
पार्श्वांकित चित्र में :

1.***वृत्त पर कौन-कौन से बिन्दु स्थित हैं*** ?

2. ***वृत्त के बाह्यक्षेत्र में स्थित बिन्दुओं के नाम बताइए।***

3. ***वृत्त केअन्त:क्षेत्र*** (***वृत्तीय क्षेत्र***) ***में स्थित बिन्दु कौन-कौन से हैं*** ?

वृत्त की रचना कर चर्चा कीजिए और निष्कर्ष निकलिए :

एक वृत्त खींचिए जिसका केन्द्र O ***और त्रिज्या*** OA ***है। वृत्त पर एक बिन्दु*** B, ***वृत्त के बाह्यक्षेत्र में एक बिन्दु*** C ***तथा वृत्तीय क्षेत्र में एक बिन्दु*** D ***लें। रेखाखंड*** OB, OC ***तथा*** OD ***खींचिए।***

1.***रेखाखंड*** OA ***तथा*** OB ***की लम्बाइयों में क्यासम्बन्ध है*** ?

2. ***रेखाखंड*** OA ***तथा*** OD ***में सम्बन्ध बताइए*** ?

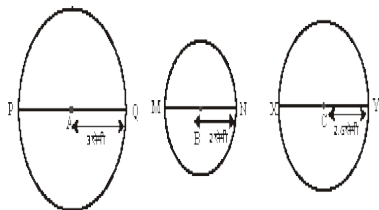
3. ***रेखाखंड*** OA ***तथा*** OC ***में कौन छोटा है*** ?

$\frac{8}{5}$ वृत्त के केन्द्र से जिन बिन्दुओं की दूरियाँ त्रिज्या के बराबर हैं, वे वृत्त पर स्थित होते हैं।

$\frac{8}{5}$ वृत्त के केन्द्र से जिन बिन्दुओं की दूरियाँ त्रिज्या से कम हैं, वे वृत्त के अंत: या वृत्तीय क्षेत्र में होते हैं।

$\frac{8}{5}$ वृत्त के केन्द्र से जिन बिन्दुओं की दूरियाँ उसकी त्रिज्या से अधिक हैं, वे वृत्त के बाह्यक्षेत्र में होते हैं।

इन्हें कीजिए, चर्चा कर निष्कर्ष निकलिए :

3 सेमी, 2 सेमी, तथा 2.5 सेमी त्रिज्या के वृत्त खींचिए जिनके केन्द्र क्रमश: A, B तथा C हैं। इनके व्यास क्रमश: PQ, MN तथा XY खींचिए और उन्हें नापिए।

1.PQ, MN तथा XY की मापें क्या हैं?

2. व्यास PQ तथा त्रिज्या AP की मापों में क्या सम्बन्ध है?

3. व्यास MN और त्रिज्या BM तथा व्यास XY और त्रिज्या CX की मापों में क्या सम्बन्ध हैं?

किसी वृत्त के व्यास की लम्बाई उसकी त्रिज्या की लम्बाई की दो गुनी होती है,

अर्थात व्यास $=2\times$ त्रिज्या

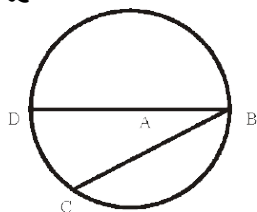
14.4 परिधि (Circumference)

एक वृत्ताकार चकती या थाली के किनारों पर पतला तार लपेटिए। इसके लिए तार के एक सिरे को अँगूठे से दबा दीजिए। पुन: तार को वृत्ताकार चकती या थाली के किनारों के अनुदिश लपेटते हुए अँगूठे वाले स्थान तक लगाइए। अब इस तार की लम्बाई नापिए। यह वृत्ताकार चकती की कौन सी माप होगी?

वृत्ताकार घेरे के परिमाप को उस वृत्त की परिधि कहते हैं।

14.5 जीवा (Chord)

बिन्दु A को केन्द्र मानकर किसी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। वृत्त पर दो बिन्दु B

और C *अंकित कीजिए। बिन्दु* B *को बिन्दु* C *से मिलाएँ। इसी प्रकार बिन्दु* B *से दूसरी रेखा खंड बिन्दु* A *से होती हुई*, BD *खींचिए।*

1.*रेखाखंड* BD *को क्या कहते हैं* ?

2. *रेखाखंड* BC *को क्या कहते हैं* ?

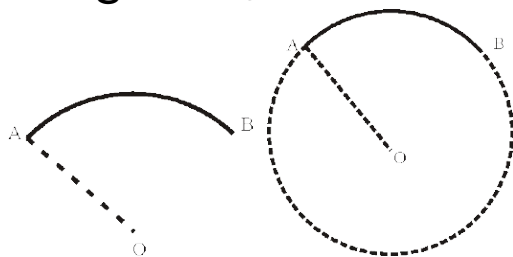
रेखाखंड BC *वृत्त की जीवा कहलाती है।*

हमने क्या सीखा :

वृत्त के किन्हीं दो बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखंड को वृत्त की जीवा कहते हैं। वृत्त के केन्द्र से होकर जाने वाली जीवा वृत्त का व्यास होती है तथा वह वृत्त की सबसे बड़ी जीवा होती है।

14.6 चाप (Arc)

इन्हें कीजिए, चर्चा कर निष्कर्ष निकलिए:

अपनी अभ्यास पुस्तिका के एक पृष्ठ पर एक बिन्दु O *लीजिए। परकार में पेंसिल लगाइए। बिन्दु* O *से* 3 *सेमी की दूरी पर एक बिन्दु* A *लीजिए। परकार की नोक को बिन्दु* O *पर तथा पेंसिल की नोक को बिन्दु* A *पर रखकर पेंसिल की नोक को बिन्दु* A *से बिन्दु* B *तक घुमाएँ।* A *से* B *तक के वक्र को क्या कहेंगे* ?

इस वक्र को वृत्त का चाप कहते हैं तथा इसे चाप AB *या* $\overset{\frown}{AB}$ *से व्यक्त करते हैं। चाप उस वृत्त का ही एक भाग है, जिसे बिन्दुवार वक्र द्वारा पूरा किया गया है।* OA *इस वृत्त की त्रिज्या है। चाप* AB *की त्रिज्या भी* OA *है। वृत्त का एक भाग चाप कहलाता है।*

हमने क्या सीखा :

नीचे दिये गये बिन्दुओं पर समूह में चर्चा करें और निष्कर्ष निकालें:

1.*किसी वृत्त की त्रिज्या और उसके व्यास में क्या सम्बन्ध होता है* ?

2. *किसी वृत्त में कितनी त्रिज्याएं होती हैं* ?

3. *किसी वृत्त में कितने व्यास होते हैं* ?

4. *वृत्त की सबसे बड़ी जीवा का क्या नाम है* ?

5. *परिधि किसे कहते हैं* ?

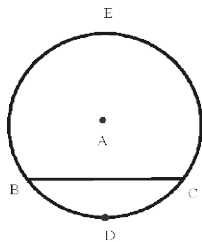
6. *एक चाप* PQ *खींचिए, जिस की त्रिज्या* 4.2 *सेमी है।*

7. *एक* 3.5 *सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचिए। इस वृत्त के कोई दो चाप* AB *और* CD *निरूपित कीजिए।*

8. 5 *सेमी त्रिज्या लेकर बिन्दु* O *को केन्द्र मानकर एक वृत्त खींचिए।* O *से* 3.5 *सेमी दूरी पर बिन्दु* P *लीजिए। बताइए कि बिन्दु* P *वृत्त के बाहर है या वृत्त के अन्तर है।*

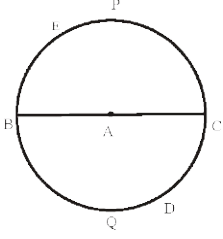
14.7 *लघु चाप और दीर्घ चाप* (Minor arc and Major arc)

किसी बिन्दु A *को केन्द्र मानकर किसी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। इस वृत्त पर कोई दो बिन्दु* B *और* C *इस प्रकार लीजिए कि जीवा* BC *केन्द्र* A *से होकर न जाए।*

1.*जीवा* BC *द्वारा वृत्त कितने भागों में विभाजित हो गया है* ?

2. *वृत्त के इन भागों में कौन सा भाग बड़ा है* ?

वृत्त के दोनों भाग वृत्त के चाप कहलाते हैं। बड़े भाग को दीर्घ चाप और छोटे भाग को लघु चाप कहते हैं। चित्र में चाप BEC *दीर्घ चाप और चाप* BDC *लघु चाप हैं।*

14.8 *अर्ध वृत्त* (Semi circle)

किसी बिन्दु A *को केन्द्र मानकर किसी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। वृत्त का व्यास* BC *खींचिए। इस वृत्ताकार भाग को अभ्यास पुस्तिका से काटकर अलग कीजिए। इसे व्यास* BC *पर मोड़कर दोनों भागों को एक दूसरे के ऊपर रखें।*

1. ***क्या वृत्त के एक भाग ने दूसरे भाग को पूरा-पूरा ढ़ॅक लिया*** ?

2. ***इससे वृत्त के दोनों भागों में क्या सम्बन्ध निकलता है*** ?

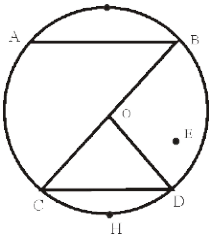
3. ***वृत्त के इन भागों में से प्रत्येक को क्यानाम दिया जा सकता है*** ?

चित्र में चाप BEC ***तथा चाप*** BDC ***वृत्तीय वक्र के अर्धवृत्त हैं। व्यास के बिन्दु*** B ***और*** C ***प्रत्येक अर्धवृत्त में सम्मिलित हैं। अर्ध वृत्त में व्यास स्वयं सम्मिलित नहीं होता है। अर्ध वृत्त और व्यास से घिरे क्षेत्र को अर्ध वृत्तीय क्षेत्र*** (Semi Circular region) ***कहते हैं। चित्र में चाप*** BDC ***और व्यास*** BC ***से घिरा क्षेत्र अर्धवृत्तीय क्षेत्र है। इसी प्रकार चाप*** BEC ***और व्यास*** BC ***से घिरा क्षेत्र भी अर्धवृत्तीय है।***

हमने क्या सीखा:

किसी वृत्त का कोई व्यास, वृत्त को दो समान भागों में विभाजित करता है। इनमें से प्रत्येक भाग अर्धवृत्त कहलाता है, जिसमें व्यास के अन्त्य बिन्दु तो सम्मिलित होते हैं परन्तु व्यास स्वयं सम्मिलित नहीं होता।

अभ्यास **14 (a)**

1.*पार्श्व चित्र को देख कर लिखिए* :

(i) ***वृत्त का केन्द्र***

(ii) ***तीन त्रिज्याओं का नाम***

(iii) ***एक व्यास का नाम***

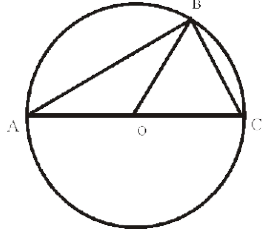
(iv) ***दो जीवाओं का नाम***

(v)***अन्त: क्षेत्र में एक बिन्दु***

(vi) *बाह्यक्षेत्र में एक बिन्दु*

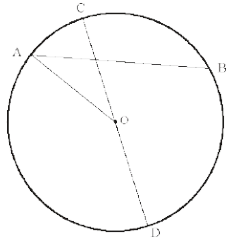
(vii) *चार चाप* (*दो लघु, दो दीर्घ*) *के नाम*

(viii) *एक अर्धवृत्त का नाम*

2. *पार्श्व चित्र देखकर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए* :

(i) *तीन त्रिज्याओं के नाम बताइए।*

(ii) *तीन जीवाओं के नाम बताइए।*

(iii) *चित्र में कितने व्यास खींचे गये हैं*? *उनके नाम भी लिखिए।*

3. *पार्श्व चित्र में बिन्दु* O *वृत्त का केन्द्र है। चित्रानुसार वृत्त के निम्नलिखित अंगों को विशिष्ट नाम दें* :

(i) *रेखाखंड* OA

(ii) *रेखाखंड* AB *और* CD

(iii) *चाप* CBD

(iv) *चाप* CAD

4. *परकार की सहायता से निम्नलिखित त्रिज्याओं के वृत्त खींचिए* :

(i) 4.5 *सेमी* (ii) 3.2 *सेमी*

5. *परकार की सहायता से निम्नलिखित व्यास के वृत्त खींचिए* :

(i) 7.6 *सेमी* (ii) 10 *सेमी*

6. *एक वृत्त की त्रिज्या* 4.5 *सेमी है। इस वृत्त के व्यास की माप ज्ञात कीजिए।*

7. *किसी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। वृत्त पर कोई दो बिन्दु* P *और* Q *लेकर इन्हें*

मिला दीजिए। बताइए कि क्याबिन्दु P, Q *को छोड़कर रेखाखंड* PQ *के सभी बिन्दु*

(i) *वृत्त पर हैं* ?

(ii) *वृत्त के बाहर हैं* ?

(iii) *वृत्त के अन्तर हैं* ?

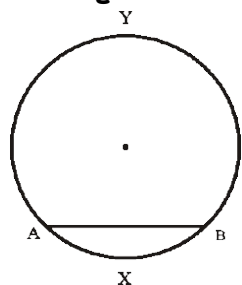
8.*निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य हैं* :

(i) *वृत्त की त्रिज्या वृत्त की जीवा होती है।*

(ii) *वृत्त का व्यास वृत्त की जीवा होती है।*

(iii) *व्यास वृत्त की सबसे बड़ी जीवा होती है।*

9. *एक रेखाखंड*AB *खींचिये जिसकी लम्बाई* 4 *सेमी है। बिन्दु* A *को केन्द्र मानकर एक वृत्त इस प्रकार खीचियें कि वह बिन्दु* B *से होकर जाए। इस वृत्त की त्रिज्या नापकर लिखिए।*

14.9 ***वृत्तखंड*** **(Segment of Circle)**

इन्हें कीजिए, चर्चा कर निष्कर्ष निकलिए :

*किसी त्रिज्या का एक वृत्त खां*e*चिए जिसका केन्द्र* O *है। उसमें एक जीवा खींचिए। इस वृत्त पर दो बिन्दु* X *और* Y*लीजिए।*

(i) *जीवा* AB *द्वारा वृत्तीय क्षेत्र कितने भागों में विभक्त किया गया है* ?

(ii) *प्रत्येक भाग को क्याकहते हैं* ?

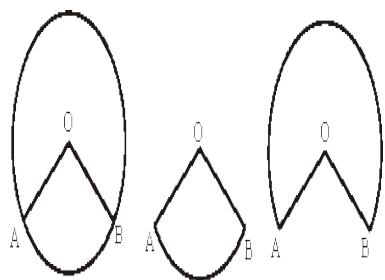
जीवा AB *के द्वारा वृत्तीय क्षेत्र दो भागों* AXB *और* AYB *में विभाजित हो गया और प्रत्येक भाग को वृत्तखंड कहते हैं।*

हमने क्या सीखा **:**

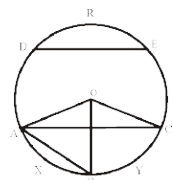
वृत्त के चाप और उसकी जीवा से घिरा हुआ क्षेत्र वृत्तखंड कहलाता है।

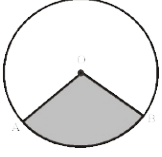
छोटे भाग को लघु वृत्तखंड और बड़े भाग को दीर्घ वृत्तखंड कहते हैं। चित्र में चाप AXB और जीवा AB से घिरा क्षेत्र लघु वृत्तखंड है, तथा चाप AYB और जीवा AB से घिरा क्षेत्र दीर्घ वृत्तखंड है।

14.10 त्रिज्यखंड (Sector)

एक पन्ना लेकर उस पर 3 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए जिसका केन्द्र O है। वृत्त पर दो बिन्दु A और B लीजिए। OA एवं OB त्रिज्याएँ खींचिए। वृत्त वृत्तीय क्षेत्र सहित पन्ने से काटकर अलग कीजिए। अब सावधानी से A से O तक तथाB से O तक काटकर वृत्त क्षेत्र के OAB भाग को चित्रानुसार अलग कीजिए। प्राप्त भागों को क्याकहेंगे ? प्राप्त दोनों भाग त्रिज्यखंड कहलाते हैं तथा छोटे भाग को लघु त्रिज्यखंड तथा बड़े भाग को दीर्घ त्रिज्यखंड कहते हैं।

वृत्त के चाप तथा चाप केअन्त्य बिन्दुओं से जाने वाली त्रिज्याओं से घिरे क्षेत्र को त्रिज्यखंड कहते हैं।

अभ्यास 14 (b)

1.पार्श्वांकित चित्र में बिन्दु O वृत्त का केन्द्र है। रेखाखंड OA, OB एवं OC त्रिज्याएँ हैं। रेखाखंड AB, AC तथा DE जीवाएँ हैं।इनका एक त्रिज्यखंड OA, OB तथा चाप AXB से घिरा क्षेत्र और उसके संगत वृत्तखंड, जीवा AB तथा AXBचाप से घिरा क्षेत्र है।

इसी प्रकार अपनी अभ्यास पुस्तिका पर चित्रानुसार अन्यपाँच त्रिज्यखंडों के नाम तथा उनके संगत वृत्तखंडों के नाम लिखें।

2. *पार्श्वांकित चित्र में छायांकित त्रिज्यखंड की त्रिज्या लिखिए।*

3. *पार्श्वांकित चित्र में छायांकित वृत्तखंड की जीवा तथा उसके संगत त्रिज्यखंड का नाम बताइए।*

इस इकाई में हमने सीखा

1.*एक समतल में एक निश्चित बिन्दु से निश्चित दूरी* (*समान दूरी*) *पर स्थित सभी बिन्दुओं का समूह वृत्त कहलाता है। निश्चित बिन्दु वृत्त का केन्द्र कहलाता है तथा निश्चित दूरी* (*समान दूरी*) *वृत्त की त्रिज्या कहलाती है।*

2. *वृत्त के केन्द्र से जिन बिन्दुओं की दूरियाँ त्रिज्या के बराबर हैं, वे वृत्त पर स्थित होते हैं। वृत्त के केन्द्र से जिन बिन्दुओं की दूरियाँ त्रिज्या से कम हैं, वे वृत्त के अन्तःक्षेत्र* (*या वृत्तीय क्षेत्र*) *में होते हैं। वृत्त के केन्द्र से जिन बिन्दुओं की दूरियाँ उसकी त्रिज्या से अधिक हैं, वे वृत्त के बाह्यक्षेत्र में होते हैं।*

3. *वृत्ताकार घेरे के परिमाप को उस वृत्त की परिधि कहते हैं।*

4. *वृत्त पर किन्हीं दो बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड वृत्त की जीवा कहलाती है तथा व्यास वृत्त की सबसे बड़ी जीवा होती है, जो वृत्त के केन्द्र से होकर जाती है।*

5. *वृत्त का एक भाग चाप कहलाता है।*

6. *किसी वृत्त का कोई व्यास, वृत्त को दो समान भागों में विभाजित करता है। इनमें से प्रत्येक भाग अर्धवृत्त कहलाता है, जिसमें वृत्त का व्यास सम्मिलित नहीं होता है।*

7. *वृत्त के चाप और उसकी जीवा द्वारा घिरा हुआ क्षेत्र वृत्ताखंड कहलाता हैं।*

8.*वृत्त के चाप तथाअन्त्य बिन्दुओं से जाने वाली त्रिज्याओं से घिरे क्षेत्र को त्रिज्यखंड कहते हैं।*

उत्तरमाला

***अभ्यास* 14 (a)**

1.(i) 0 ***केन्द्र***, (ii) OB, OC, OD (iii) BC, (iv) AB, CD (v) E (vi) ***कोई नहीं*** (vii) AB, AC, ABDC, BDCA, (viii) BAC। 2. (i) OA, OB, OC (ii) AB, BC, AC (iii) ***एक***, AC, 3. (i) ***त्रिज्या***, (ii) AB***जीवा***, CD ***व्यास***, (iii) ***अर्धवृत्त*** (iv) ***अर्धवृत्त*** , 6. 9 ***सेमी***, 7. (i) ***नहीं***, (ii)***नहीं***, (iii) ***हाँ***, 8.(i) ***असत्य*** (ii) ***सत्य*** (iii) ***सत्य***, 9. 9 ***सेमी***

अभ्यास 14 (b)

2. OA, OB 3. ***जीवा*** PQ ***त्रिज्य खंड*** OPQ

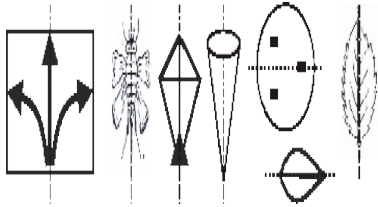
इकाई 15 समिमितता

- पर्यावरण का निरीक्षण करके सममित वस्तुओं की पहचान करना
- एक तलीय (2-D) ज्यामितीय आकृतियों का निरीक्षण करके सममितता की रेखा खिंचवाना तथा परावर्तित सममितता का बोध

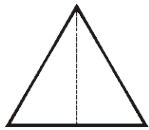
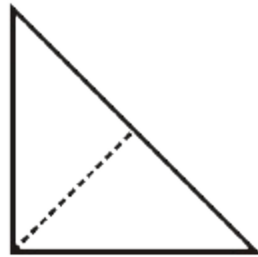
15.1 भूमिका :

आप अपने आस-पास की बहुत सी वस्तुओं को प्रतिदिन देखते हैं। क्या आप को प्रकृति में पाये जाने वाले जीवों एवं पेड़ पौधों की पत्तियों में कोई विशेषता दिखाई देती है। आप स्वयं अपने शारीरिक संरचना को देखें, सामने सिर के ऊपर से आँखो के मध्य तथा नाक के बीच से नीचे पैर तक एक रेखा खींचे तो देखते हैं कि रेखा के एक तरफ की आकृति, दूसरे तरफ की आकृति के समान होती है। इसी प्रकार की विशेषता सामान्यत: सभी जीवों में पाई जाती है। आप आम, पीपल, केला, अशोक आदि वनस्पतियों की पत्तियों को प्रतिदिन देखते हैं। इन पत्तियों के बीच में एक मोटी मजबूत रीढ़ होती है, इसके दोनों तरफ के भाग समान होते हैं।

इन आकृतियों को बीच की रीढ़ के सापेक्ष सममित आकृतियाँ कहते हैं। आइए निम्नांकित आकृतियों के विषय में जाने

इन आकृतियों को ध्यान से देखें, प्रत्येक आकृति में बीच में खींची गई रेखा के सापेक्ष मोड़ा जाय तो एक भाग दूसरे भाग को पूर्णतया ढ़ॅक लेता है अथवा मोड़ रेखा पर एक समतल दर्पण रखें तो आकृति के एक भाग का प्रतिबिम्ब दूसरे भाग को पूरी तरह ढ़ॅक लेता है। ऐसी आकृतियों को सममित (Symmetric) आकृतियाँ कहते हैं। मोड़ या रेखा को सममित रेखा, सममित अक्ष या दर्पण रेखा कहते हैं।

अतः इस प्रकार की आकृति जिसके सममित रेखा पर दर्पण रखने पर एक भाग का प्रतिबिम्ब दूसरे भाग को ढँक लेता है, परावर्तन सममितता (Reflection Symmetry) *कहलाता है।*

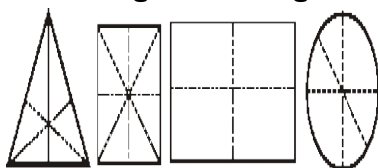
प्रयास कीजिए

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर चार चित्र खींचिए और सममित अक्ष को दर्शाइए। चित्र में सममित अक्ष बिन्दुदार रेखा द्वारा दर्शाये गये हैं। इनमें से किस में और सममित अक्ष खींचे जा सकते है? दर्शाइए।

समद्विबाहु त्रिभुज *वर्ग* *समद्विबाहु समकोण त्रिभुज*
आयत

इन्हें समझें :

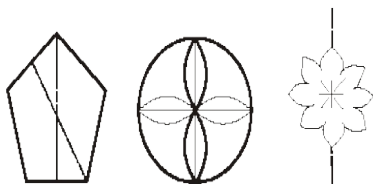
दो या दो से अधिक सममित अक्ष वाली आकृतियों को देखे।

प्रयास कीजिए

दी हुई आकृतियों में सममित रेखाएं गिन कर बताइये। क्याइनमें परावर्तन सममितता का बोध होता है?

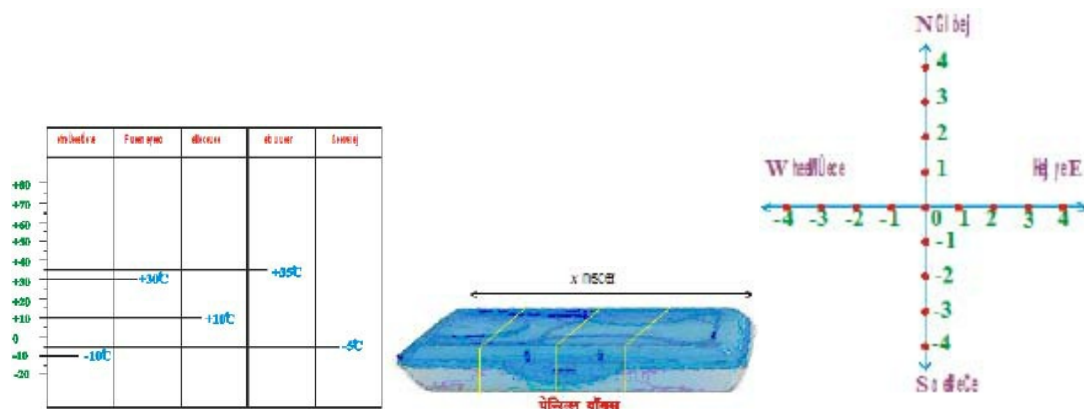
आकृति 1 *आकृति* 2 *आकृति* 3 *आकृति* 4

समबाहु त्रिभुज वर्ग आयत वृत्त

निम्नांकित आकृतियों को देखिए :

आकृति 1 आकृति 2 आकृति 3

आकृति -1 में दो सममित अक्ष खींचे गये हैं। इस आकृति में कितने और सममित अक्ष खींचे जा सकते हैं ? अपनी अभ्यास पुस्तिका पर आकृति -1 की तरह एक समपंचभुज अनुरेख (ट्रेस) करके बनाइए और उसके सभी सममित अक्ष खींचिए। इसी प्रकार आकृति-2 एवं आकृति-3 की तरह अपनी अभ्यास पुस्तिका पर आकृतियाँ बनाइए और उनके कुछ सम्भव सममित अक्ष खींचिए।

ध्यान दीजिए :

सभी समभुज वाली आकृतियों में उतने ही सममित अक्ष खींचे जा सकते हैं जितनी उनकी भुजाएँ होती हैं। इसे आप स्वयं जाँच कर देखिए।

निम्नांकित आकृतियों और अक्षरों को देखिये तथा इनमें से सममिति आकृतियों को पहचानिए। सममिति आकृतियों को अपनी अभ्यास पुस्तिका पर बनाकर उनकी सममित रेखाएं खींचिए।

सोचिए एवं चर्चा कीजिए :

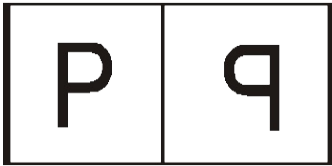
- क्या पायजामें के दोनों भागों में सममितता है ?

- *ताश के पत्तों पर दी गई डिजाइन में सममितता है?*
- *किसी भी द्विबीज पत्री बीजों जैसे सेम, चना, बादाम, काजू आदि के दोनों पत्रों में सममितता है?*
- *स्वयं के बीच से एक काल्पनिक रेखा (सममित रेखा) खीचिए। क्या आप के दोनों भागों में सममितता है?*

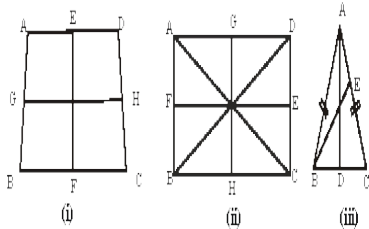
15.2 *प्रतिबिम्ब और सममितता :*

किसी वस्तु के दर्पण के सामने रख कर दर्पण में बने प्रतिबिम्ब का अवलोकन करें। आप क्यादेखते हैं? क्यावस्तु और प्रतिबिम्ब में सममितता है? सममित रेखाएँ कहाँ पर हैं?

ध्यान दीजिए :

जब वस्तु का प्रतिबिम्ब दर्पण में बनता है तो प्रतिबिम्ब का आकार और उसके कोणो में कोई परिवर्तन नहीं होता है। अर्थात वस्तु और प्रतिबिम्ब के आकार और कोण मे समानता होने से दोनों सममित होते हैं।

***अभ्यास* 15**

1. *अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े* (capital) *अक्षरों को लिखकर देखें। उनमे से जो सममित हैं। उनके सममिति अक्षों को पहचानें।*

2. *निम्नांकित आकृतियों के सभी सममित अक्षों की पहचान कर उन्हें लिखिए :*

3. *निम्नलिखित में कितने सममित अक्ष होंगे?*

(i) *समबाहु त्रिभुज* (ii) *समद्विबाहु त्रिभुज*

(iii) *वर्ग* (iv) *समचतुर्भुज*

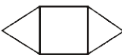
(v) वृत्त

4. निम्नांकित की रचना कीजिए :

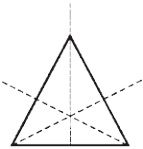
(i) एक त्रिभुज जिसमें एक सममित अक्ष हो।

(ii) एक त्रिभुज जिसमें तीन सममित अक्ष हों।

(iii) एक त्रिभुज जिसमें एक भी सममित अक्ष न हो।

5. एक समषटभुज खींचकर उसकी सभी सममित रेखाओं को खींचिए।

6. अपने आस-पास के पर्यावरण का निरीक्षण करके सममित वस्तुओं की पहचान कर उनकी सूची बनाइए।

7. निम्नलिखित तालिका को पूरा कीजिए :

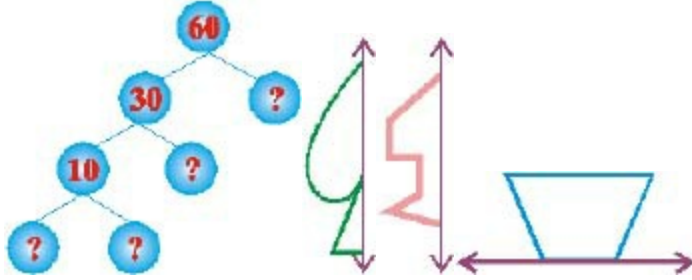
क्रम0 सं0	आकृति	सममित रेखाओं की संख्या
(i)		
(ii)		
(iii)		
(iv)		
(v)		

8.निम्न तालिका को पूरा कीजिए :

आकार	आकृति खाका या रूपरेखा --	सममित रेखाओं की संख्या
समबाहु त्रिभुज		....
वर्ग	....	....
आयत	....	....
समद्विबाहु त्रिभुज	....	....

समचतुर्भुज ....

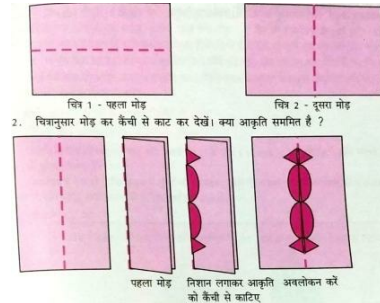
वृत्त ....

9. *अपने घर व विद्यालय की ऐसी दस वस्तुओं की सूची बनाइये जो सममित हो।*

10. *दी गई सममित आकृतियों को पूरा करिए -*

क्रिया कलाप

1. *एक आयताकार कागज लीजिए। इसे लम्बाई की ओर से इस प्रकार मोड़िए, जिससे कि एक आधा भाग दुसरे भाग को पूर्णतया ढक लें। क्या यह मोड़ सममित अक्ष है* ? *क्यों* ?

इसे खोलकर पुन: चौड़ाई की ओर से समान तरीके से मोड़िए। क्या दूसरा मोड़ भी सममित अक्ष है ? *क्यों* ?

2. *चित्रानुसार मोड़ कर कâची से काट कर देखें। क्या आकृति सममित है* ?

इस इकाई में हमने सीखा :

1.*आकृति में यदि एक रेखा आकृति को दो बराबर भागों में बांटती है तो वह सममित रेखा कहलाती है। दूसरे शब्दों में किसी आकृति को दो समान भागों में बांटने वाली रेखा सममित रेखा कहलाती है।*

2. *यदि दो आकृतियां आपस में समान हैं जैसे हमारे दोनों हाथ, ये रूप या आकार में समान हैं; समरूप कहलाएंगे, जबकि सममित में एक ही वस्तु के दो समान भाग होते हैं।*

3. ***सममित का हमारे दैनिक जीवन में बड़ा महत्व है। जैसे कला, शिल्प कला, विभिन्न प्रकार की डिजाइन बनाने में प्रकृति की सुन्दरता में सममितता का बहुत योगदान है। यदि इसे निकाल दिया जाये तो दुनिया की सुन्दरता समाप्त हो जाएगी।***

उत्तरमाला

***अभ्यास* 15**

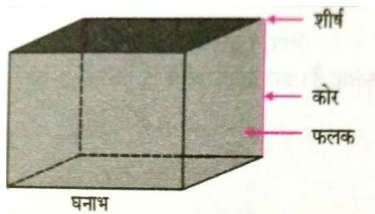
2. (i) EF (ii) GH ***और*** EF (iii) AD, 3. (i) ***तीन***; (ii)***एक*** (iii) ***चार*** (iv) ***दो*** (v) ***अपरमित***; 4. (i) ***समद्विबाहु त्रिभुज***, (ii) ***समबाहु त्रिभुज***, (iii)***विषमबाहु त्रिभुज***; 5. (i) ***दो*** , (ii)***दो***, (iii) ***दो***,

(iv) ***एक***, (v) ***दो*** (vi)***एक भी नहीं***

इकाई 16 क्षेत्रमिति(मेन्सुरेशन)

- घन, घनाभ, पिरामिड तथा प्रिज्म के अंग
- आयतन की अवधारणा
- घन एवं घनाभ का आयतन (सूत्र की सहायता से)

16.1 भूमिका :

आपने ज्यामितीय अवधारणा के अन्तर्गत ठोस वस्तुओं और उनके फलकों के विषय में अध्ययन कर लिया है। आप यह भी जानते हैं कि कुछ वस्तुओं के फलक समतल, कुछ के समतल और वक्र दोनों प्रकार के तथा कुछ वस्तुओं के फलक केवल वक्र ही होते हैं। आपने गणित किट के अन्तर्गत, घन, घनाभ, बेलन, गोला तथा शंकु को देखा है। इनमें घन एवं घनाभ के सभी फलक समतल हैं,बेलन के दोनों सिरे समतल तथा बीच का भाग वक्र तल होता है, शंकु का एक सिरा समतल तथा दूसरा नुकीला जिसे शीर्ष कहते हैं, बीच का तल वक्र होता है। जबकि गोले का तल केवल वक्र होता है। आइए अब हम समतल फलक वाले घन तथा घनाभ के समान आकृति वाले वस्तुओं की कोर, फलक और शीर्ष के विषय में जानें।

16.2 घन, घनाभ, पिरामिड तथा प्रिज्म के अंग

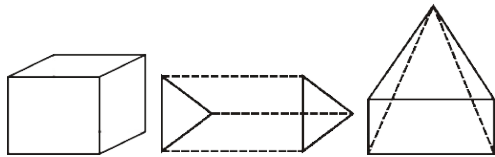
इन्हें कीजिए और सोचकर निष्कर्ष निकलिए :

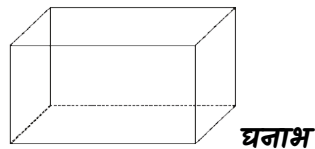
घनाभ के चित्र को ध्यान से देखें ओर बतायें कि इसके शीर्ष (Vertex), कोर (Edge)

और फलक (face) *की संख्या कितनी है*।

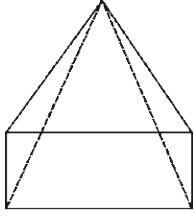
हम चित्र में देख रहे हैं कि घनाभ में शीर्षो की संख्या 8, *कोरों की संख्या* 12 *और फलकों की संख्या* 6 *हैं*। *शीर्ष को* V, *कोर को* E *तथा फलक को* F *द्वारा प्रदर्शित करते हैं*।

प्रयास कीजिए

चित्र में दर्शाए गये घन, प्रिज्म और पिरमिड के शीर्ष, फलक और कोरों की गणना कर एक सारणी बनाइए।

हमने देखा कि घन या घनाभ के आकार वाली वस्तुओं में 6 *फलक*, 8 *शीर्ष तथा* 12 *कोरें हैं*।

घनाभ

चित्र से स्पष्ट है कि निम्नांकित प्रिज्म में दो त्रिभुजाकार एवं तीन आयताकार फलक है। *अतः इसमें* 5 *फलक*, 6 *शीर्ष तथा* 9 *कोरें हैं*

प्रिज्म

चित्र में हम देख रहे है कि पिरमिड में 4 *त्रिभुजाकार एवं एक आयताकार फलक है*। *इस प्रकार इसमें* 5 *फलक*, 5 *शीर्ष तथा* 8 *कोरे है*।

पिरमिड

इन्हें कीजिए

घनाभ, प्रिज्म एवं पिरमिड के फलक, शीर्ष और कोरों की संख्याओं की सारणी बनाकर निष्कर्ष निकलिए

नाम	शीर्षों की संख्या (V)	फलकों की संख्या (F)	कोरों की संख्या (E)
घनाभ	8	6	12
प्रिज्म	6	5	9
पिरमिड	5	5	8

उपर्युक्त सारणी से हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में शीर्षों और फलकों का योग कोरों की संख्या से 2 अधिक है। इस प्रकार हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $V + F = E + 2$

ध्यान दें,

यदि पिरमिड का आधार एक त्रिभुज हो तो इस प्रकार के पिरमिड को चतुष्फलक कहते हैं, क्योंकि इसमें चार फलक होते हैं। पिरमिड का आधार बहुभुज भी हो सकता है।

इस प्रकार हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि :

घनाभ, घन, प्रिज्म तथा पिरमिड प्रत्येक के लिए $V + F = E + 2$ सम्बन्ध सत्य है।

अभ्यास 16 (a)

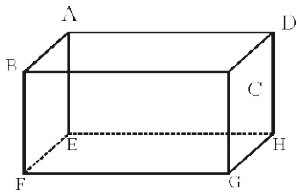
1. निम्नलिखित वस्तुओं में घनाभ के आकार की वस्तु को पहचानिए:

(i) गेंद (ii) सन्दूक

(iii) सड़क पर गिट्टी कूटने वाला रोलर (iv) कीप

(v) आलमारी (vi) पुस्तक (vii) ईंट

2.(i) पार्श्व चित्र में शीर्ष A पर मिलने वाली कोरों के नाम लिखिए।

(ii) पार्श्व चित्र में फलक ABCD के समान्तर फलक का नाम बताइए।

3.घनाकार लूडो के पासे में फलकों, कोरों और शीर्षो की संख्या बताइए।

क्या इसके लिए V + F = E + 2 सम्बन्ध सत्य है।

4.लूडो के पासे के आमने- सामने के फलकों पर अंकित बिन्दुओं की संख्या का योग लिखें।

16.3 आयतन की अवधारणा

किसी भी वस्तु के द्वारा घेरे गये कुल स्थान की माप जिस भौतिक राशि के द्वारा की जाती है, उसे उस वस्तु का आयतन कहते हैं।

जिस प्रकार लम्बाई की इकाई सेमी या मीटर, क्षेत्रफल की इकाई वर्ग सेमी या वर्ग मीटर होती है, उसी प्रकार आयतन का मात्रक घन सेमी या घन मीटर होता है।

एक ऐसा घन जिसके प्रत्येक कोर की लम्बाई 1 सेमी है, तो उस घन द्वारा घेरे गये कुल स्थान की माप 1 घन सेमी आयतन के रूप में व्यक्त की जाती है।

अर्थात 1 घन सेमी आयतन, ऐसे घन का आयतन होता है, जिसके प्रत्येक कोर की लम्बाई 1 सेमी होती है।

प्रयास करें

1 घन मीटर आयतन का क्या अर्थ है ?

विशेष :

1 घन मीटर = 1 मी × 1 मी ×1 मी

= 100 सेमी ×100 सेमी × 100 सेमी

= 1000000 घन सेमी = 10^6 घन सेमी

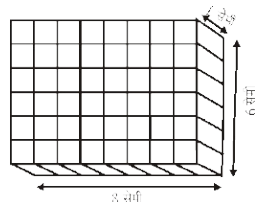
घन सेमी को सेमी^{3} भी लिखा जाता है, इसी प्रकार घन मीटर को मी^{3} भी लिखा जाता है।

इन्हें सोचिए, तर्क कीजिए तथा निष्कर्ष निकलिए :

8 सेमी लम्बे, 6 सेमी चौड़े तथा 3सेमी ऊँचे घनाकार साबुन के टुकड़े का आयतन

ज्ञात करना। एक घनाभ के आकार के साबुन का टुकड़ा लीजिए, जिसकी लम्बाई 8 सेमी, चौड़ाई 6 सेमी व ऊँचाई 3 सेमी है। इसकी ऊँचाई को 3 बराबर भागों में बाँटिए। इनको किसी तेज चाकू से चित्रानुसार काटकर तीन एवं समान पट्टियों में अलग कीजिए।

क्रिया कलाप :

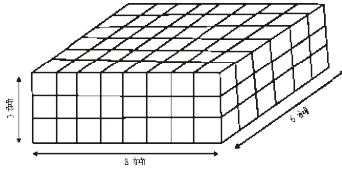
अब किसी पट्टी की लम्बाई को 8 समान भागों में बाँटकर पट्टियाँ प्राप्त कीजिए। इन आठ पट्टियों में प्रत्येक पट्टी को 6 समान भागों मेंबाँटिए। इस प्रकार प्राप्त घन सेमी के टुकड़ों को गिनिए।

प्रयास करें :

1. एक पट्टी में कुल कितने टुकड़े प्राप्त हुए ?
2. प्रत्येक टुकड़े की लम्बाई, चौड़ाई व ऊँचाई कितनी-कितनी है ?
3. क्या प्रत्येक टुकड़े का आयतन घन के रूप में है ?
4. साबुन के काटने पर कितनी पट्टियाँ प्राप्त होंगी ?

हम देखेंगें कि कुल प्राप्त टुकड़े 48 हैं तथा प्रत्येक टुकड़े की लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई 1 सेमी है तथा प्रत्येक टुकड़ा घनाकार होगा।

क्या आप बता सकते हैं :

एक पट्टी का आयतन 1 सेमी कोर वाले कितने घनों के आयतन के बराबर होगा। एक पट्टी का आयतन कुल प्राप्त 48 घनाकार टुकड़ों के बराबर होगा अर्थात एक पट्टी का आयतन 48 घन सेमी के बराबर होगा।

यदि प्राप्त तीनों पट्टियों को एक दूसरे के ऊपर रखें तो हमें पुन: साबुन का टुकड़ा पार्श्व में प्रदर्शित प्रकार का प्राप्त होगा।

इस प्रकार :

साबुन का आयतन = 3 ×***एक पट्टी का आयतन***

=3 ×48 ***घन सेमी***

= 3× (6 ×8) ***घन सेमी***

=8 × 6 ×3 ***घन सेमी***

=***लम्बाई***× ***चौड़ाई*** × ***ऊँचाई***

इस प्रकार हम निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि

घनाभ का आयतन = लम्बाई× चौड़ाई ×ऊँचाई

= $l \times b \times h$

जहाँ l = ***लम्बाई***, b = ***चौड़ाई*** h = ***ऊँचाई***

उपर्युक्त सूत्र की सहायता से साबुन या किसी घनाभ का आयतन उसे बिना काटे हुए प्राप्त किया जा सकता है।

घन के आयतन का सूत्र :

हम जानते हैं कि घन एक ऐसा घनाभ है, जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई परस्पर समान होती है। अत: घनाभ के आयतन के सूत्र में l, b, ***तथा*** h ***के स्थान पर घन की कोर*** (***भुजा***) a ***को प्रतिस्थापित करके घन के आयतन को ज्ञात करने का सूत्र प्राप्त कर सकते हैं।***

इस प्रकार हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि :

घन का आयतन = a× a×a = a³

जहाँ a = ***घन की एक भुजा***

उदाहरण 1: ***एक घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए, जिसकी लम्बाई*** 5.5 ***सेमी, चौड़ाई*** 3.5 ***सेमी तथा ऊँचाई*** 4.0 ***सेमी है।***

हल: घनाभ की लम्बाई l = 5.5 ***सेमी***

घनाभ की चौड़ाई b = 3.5 ***सेमी***

घनाभ की ऊँचाई h = 4.0 ***सेमी***

घनाभ का आयतन = $l \times b \times h$

घनाभ का आयतन = 5.5 ×3.5×4.0***घन सेमी***

= 77 ***घन सेमी***

घनाभ का आयतन=77 ***घन सेमी***

उदाहरण **2** : ***एक घन की प्रत्येक कोर*** 6 ***मी है। इस घन का आयतन ज्ञात कीजिए।***

हल : घन की प्रत्येक कोर (a) = 6 ***मी***

घन का आयतन = a^3 ***घन मी***

घन का आयतन =6^3 ***घन मी***

= 6×6×6 ***घन मी***

= 216 ***घन मी***

घन का आयतन =216 ***घन मी***

उदाहरण **3** : 8 ***मी लम्बी***, 3.5 ***मी ऊँची एवं*** 20 ***सेमी मोटी दीवार का आयतन ज्ञात कीजिए।***

हल : यहाँ दीवार की लम्बाई l = 8 ***मी***

दीवार की चौड़ाई b = 3.5 ***मी***

दीवार की मोटाई h =20 ***सेमी*** = 0.20 ***मी***

सूत्र दीवार का आयतन = $l \times b \times h$

= 8 ×3.5× 0.20 ***घन मी***

= 5.600 ***घन मी***

दीवार का आयतन = 5.6 ***घन मी***

उदाहरण **4 :** ***लकड़ी के घनाभ के आकार के एक टुकड़े की लम्बाई*** 64 ***सेमी, चौड़ाई*** 32 ***सेमी तथा ऊँचाई*** 48 ***सेमी है। इसमें*** 16 ***सेमी***, ***लम्बाई***, 8 ***सेमी चौड़ाई तथा*** 12 ***सेमी ऊँचाई वाले कितने गुटके बनाए जा सकते हैं***?

हल: लकड़ी के बड़े गुटके की लम्बाई = 64 *सेमी*

लकड़ी के बड़े गुटके की चौड़ाई = 32 *सेमी*

लकड़ी के बड़े गुटके की ऊँचाई = 48 *सेमी*

लकड़ी के बड़े गुटके का आयतन = 64 ×32 × 48 *घन सेमी*

इसी प्रकार छोटे गुटके का आयतन = 16 × 8 ×12 *घन सेमी*

लकड़ी के बड़े गुटके से बनने

वाले छोटे गुटकों की संख्या = $\frac{\text{लकड़ी के बड़े गुटके का आयतन}}{\text{छोटे गुटके का आयतन}}$

$= \frac{64 \times 32 \times 48 \text{ घन सेमी}}{16 \times 8 \times 12 \text{ घन सेमी}}$

गुटकों की संख्या = 64

इन्हें भी जनिए:

एक घन जिसकी कोर 10 *सेमी अर्थात* 1 *डेसी मी है*, *उसका आयतन कितना होगा* ?

घन का आयतन = 10 *सेमी*×10 *सेमी* × 10 *सेमी*

= 1000 *सेमी*^{3} (1 *घन डेसी मी*)

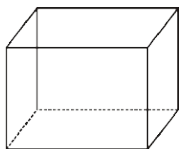
= 1 *लीटर*

इस प्रकार

1 *घन मी* = 1000000 *घन सेमी*

= 1000 *लीटर*

अभ्यास 16 (b)

1. *नीचे दी गई लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई वाले घनाभों के आयतन ज्ञात कीजिए।*

(i) *लम्बाई* = 8 *सेमी*, *चौड़ाई* = 5 *सेमी तथा ऊँचाई* = 4 *सेमी*

(ii) *लम्बाई* = 80 *सेमी*, *चौड़ाई* = 40 *सेमी तथा ऊँचाई* = 1 *मी* 20 *सेमी*

(iii) *लम्बाई* = 14 *सेमी*, *चौड़ाई* = 8.5 *सेमी*, *तथा ऊँचाई* = 5 *सेमी*

(iv)*लम्बाई* = 1.4 *सेमी*, *चौड़ाई* = 0.5 *सेमी तथा ऊँचाई* = 0.4 *मीटर*

2. *नीचे दी गई भुजा की माप वाले घनों का आयतन ज्ञात कीजिए।*

(i) *भुजा* = 12 *सेमी* (ii) *भुजा* = 6.4 *सेमी*

(iii)*भुजा* = 7.2 *सेमी* (iv) *भुजा* = 1.3 *सेमी*

3. *एक कमरे की लम्बाई* 5 *मी*, *चौड़ाई* 4 *मी और ऊँचाई* 3.5 *मी है। कमरे का आयतन ज्ञात कीजिए।*

4. *दो घनाकार वस्तुएं हैं जिनकी कोरें क्रमश*: 2 *सेमी और* 4 *सेमी हैं। इनके आयतन* V1*और* V2 *में सम्बन्ध* (*अनुपात*) *ज्ञात कीजिए।*

5.*एक मैदान की लम्बाई* 40 *मीटर तथा चौड़ाई* 15 *मीटर है। यदि इस मैदान पर* 50 *मिमी वर्षा हुई हो*, *तो ज्ञात कीजिए कि मैदान पर कुल कितने लीटर पानी गिरा*, *यदि* 1 *घन मी* = 1000 *लीटर।*

6. *एक ईंट की लम्बाई*, *चौड़ाई व मोटाई क्रमश*: 25 *सेमी*, 10 *सेमी व* 7.5 *सेमी है। एक* 5 *मी लम्बी*, 3.5 *मी ऊँची व* 33 *सेमी मोटी दीवार को बनाने में कितनी ईंट लगेंगी* ?

7. *एक घनाकार लकड़ी के टुकड़े का आयतन* 264 *घन सेमी है यदि टुकड़ा* 8 *सेमी लम्बा*, 6 *सेमी चौड़ा हो तो उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।*

8.*लकड़ी के घनाभ के आकार के एक टुकड़े की लम्बाई* 75 *सेमी*, *चौड़ाई* 15 *सेमी तथा ऊँचाई* 5 *सेमी है*, *तो इसमें से* 15 *सेमी लम्ब*s, 3 *सेमी चौड़े तथा* 1 *सेमी ऊँचे कितने गुटके बनाये जा सकते हैं* ?

9. *भूमिगत जल संरक्षण हेतु वर्षा ऋतु में जल संग्रहण के लिए एक आवासीय परिसर में कच्ची जमीन पर* 5 *मी*0 *लम्बा*, 3 *मी*0 *चौड़ा तथा* 1.5 *मी*0 *गहरा गड्ढा खोदा गया है। बताइए उस गड्ढे में अधिकतम कितने लीटर पानी एकत्र किया जा सकता है* ?

10. *एक घनाभाकार पानी की टंकी की भीतरी मापें* 5 *मी।*, 4 *मी। तथा* 3 *मी। है। टंकी जल से* $\frac{9}{10}$ *भाग भरी हुई है। इसके अन्तर के जल को प्रदूषण मुक्त एवं शुद्ध करने पर प्रति एक हजार लीटर रु*10 *का खर्च आता है। बताइए कि टंकी के सम्पूर्ण जल*

को शुद्ध करने पर कुल कितना व्यय होगा।

प्रोजेक्ट :

एक घनाभ के आकार का चाय का डिब्बा लीजिए जिसकी लम्बाई = 15 सेमी, चौड़ाई = 9 सेमी तथा ऊँचाई = 6 सेमी। इसको खोलकर सभी फलकों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(i) डिब्बे के सभी फलकों (सम्पूर्ण पृष्ठ) का क्षेत्रफल कितना है ?

(ii) यदि डिब्बे की लम्बाई = l सेमी, चौड़ाई = b सेमी और ऊँचाई = h सेमी, तो उसके सम्पूर्ण पृष्ठ का सूत्र ज्ञात कीजिए।

इस इकाई से हमने सीखा :

1. ठोस ज्यामितीय आकृतियों में प्राय: फलक को F से, शीर्ष को V से तथा कोरों को E से प्रदर्शित करते हैं।

2. घनाभ तथा घन प्रत्येक के लिए 6 फलकें, 8 शीर्ष तथा 12 कोरें होती हैं।

3. प्रिज्म (त्रिभुजाकार) के लिए 5 फलक, 6 शीर्ष तथा 9 कोरें होती हैं।

4. पिरमिड (आयताकार आधार का) के लिए 5 फलकें, 5 शीर्ष तथा 8 कोरें होती हैं।

5. घनाभ, घन, प्रिज्म तथा पिरमिड प्रत्येक के लिए V + F = E + 2सम्बन्ध सत्य है।

6. किसी वस्तु द्वारा घेरे गये कुल स्थान की माप आयतन द्वारा की जाती है तथा इसका मात्रक घन इकाई (घन सेमी या घन मी आदि होता है)

7. घनाभ का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई ×ऊँचाई

= $l \times b \times h$ घन इकाई

जहाँ लम्बाई = l, चौड़ाई = b, ऊँचाई =1 h,

8. घन का आयतन = भुजा × भुजा× भुजा

= a×a ×a = a^3 घन इकाई

जहाँ a = घन के एक कोर या भुजा की लम्बाई

ṭV́

उत्तरमाला

अभ्यास 16 (a)

1. *सन्दूक*, *आलमारी*, *पुस्तक*, *ईंट*; 2. (i)EH, EA, EF; (ii) EFGH; 3. *फलक* 6, *कोरे* 12, *शीर्ष* 8, *सत्य है*; 4. 7

अभ्यास 16 (b)

1. (i)160 *घन सेमी*, (ii)384000 *घन सेमी*, (iii) 595 *घन सेमी*, (iv) 28 *घन सेमी*; 2. (i)1728 *घन सेमी*, (ii) 262.144 *घन सेमी*; (iii)373.248 *घन सेमी*, (iv) 2.197 *घन सेमी*; 3. 70 *घनसेमी* 4. 1:8;

5. 30000 *लीटर*, 6. 3080 *ईंटें*; 7. 5.5 *सेमी*; 8.125 9. 22500 *लीटर*; 10. *रू*540

परिशिष्ट : भारतीय प्राचीन गणितीय पद्धति

- ❖ गणितज्ञ श्रीनिवास रामानुजन
- ❖ विनिकुलम, विनिकुलम से साधारण संख्या में बदलना
- ❖ घटाना, सूत्र परावर्त्य योजयेत्
- ❖ बीजीय व्यंजको को जोड़ना एवं घटाना, मिश्रित गणनाएँ
- ❖ विभाजनीयता के नियम (3, 7, 9 की विभाजनीयता की जानकारी)
- ❖ गुणा निखलम सूत्र, आधार, उपाधार की जानकारी देना
- ❖ पहाड़ा पढ़ाना

भारतीय गणित की प्राचीन काल से ही अत्यन्त उज्ज्वल परम्परा रही है। इस परम्परा को चार चाँद लगाने वाले अनेक मनीषी रहे हैं, जिनके अनवरत प्रयास से शून्य का आविष्कार भारत में ही हुआ है और पुनः दाशमिक संख्या पद्धति का विकास, उसके फलस्वरूप छोटी-बड़ी संख्याओं को लिखना, बोलना और पढ़ना सम्भव हो सका तथा गणना की चार मौलिक संक्रियाओं जोड़ना, घटाना, गुणा करना और भाग करने का अस्तित्व में आना एक सार्वभौमिक इतिहास बन सका। फलस्वरूप अनेक प्रश्नों को हल करना सम्भव हो सका। इसी उज्ज्वल परम्परा में स्वामी श्री भारती कृष्ण तीर्थ जी महाराज, जो गोवर्धनपीठ के शंकराचार्य रहे हैं, उन्होंने गणित पर गहन शोध में अत्यन्त सराहनीय कार्य किया है तथा उन्होंने इस पर एक श्रेष्ठ 'वैदिक गणित' की रचना की जिसमें कुल 40 अध्याय हैं तथा इसमें गुणन, भाग, खण्डीकरण, समीकरण, फलन इत्यादि को सरलतम प्रक्रिया से हल करने के नियम एवं विधियाँ दी हुई हैं जो वैदिक गणित के 16 सूत्रों तथा 13 उपसूत्रों (उपप्रमेयों) पर आधारित हैं। सूत्रों के अनुप्रयोग से कुछ कठिन प्रश्न भी अत्यन्त सरलता से हल हो जाते हैं।

17.1 श्री निवास रामानुजन

महान् भारतीय गणितज्ञ श्री निवास रामानुजन का जन्म 22 दिसम्बर 1887 को ईरोड (तमिलनाडु) में एक श्री वैष्णव ब्राह्मण परिवार में हुआ। बचपन से ही इनकी अद्भुत विलक्षण प्रतिभा गणित के क्षेत्र में देखी गयी। यह एक अद्भुत साम्य है कि प्राचीन भारतीय गणितज्ञों की भाँति रामानुजन भी सीधे सूत्र प्रस्तुत कर देते थे। इनकी प्रतिभा से प्रभावित होकर कैम्ब्रिज विश्वविद्यालय के प्रो. जी.एच.हार्डी ने इनको वहाँ आने की सारी औपचारिकताएँ तथा धन आदि की व्यवस्था पूरी की। 17 मार्च 1914 को रामानुजन लन्दन के लिए रवाना हुए और वहाँ 27 फरवरी 1919 तक रहे। वहाँ पर ये प्रो. हार्डी एवं प्रो. लिटिलवुड के साथ कई विषयों पर शोध कार्य करते तथा परस्पर ज्ञान का आदान-प्रदान करते। इनके ज्ञान की महानता के कारण 28 फरवरी 1918 को मात्र 30 वर्ष की आयु में ये एफ.आर.एस. (F.R.S.) हो गये तथा 13 अक्टूबर 1918 को ट्रिनिट कालेज, कैम्ब्रिज के फेलो से सम्मानित हए। जनवरी 1919 में इन्हें इण्डियन मैथेमेटिकल सोसाइटी (जो उन दिनों इंग्लैण्ड में थी) द्वारा भी सम्मानित किया

गया। प्रो. हार्डी ने रामानुजन की तुलना यूरोप के महान गणितज्ञों आयलर (1707-83), गौस (1777-1855) और याकोबी (1805-51) के साथ की है।

गणित के इतिहासकार हर्बर्ट तर्नबुल ने लिखा है ''रामनुजन की गवेषणाओं से एक नये युग का सूत्रपात हुआ।''

इनकी अद्भुत प्रतिभा के दर्शन उस समय भी हुआ जब बीमारी की अवस्था में अस्पताल में इन्हें देखने डॉ. हार्डी गये। संयोगवश जिस टैक्सी से प्रो. हार्डी गये थे, उसका नम्बर 1729 था। डॉ. हार्डी ने दुःखी स्वर में कहा कि जिस टैक्सी से वे यहाँ आये हैं, उसका नम्बर बड़ा अशुभ है, क्योंकि उसका एक गुणनखण्ड 13 है। तुरन्त रामानुजन ने लेटे-लेटे ही उत्तर दिया कि यह तो एक सबसे छोटी संख्या है जिसे दो प्रकार से दो घन संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त कर सकते हैं, यथा $1729 = 10^3 + 9^3$ तथा $12^3 + 1^3 = 1729$; इसे सुनकर डॉ. हार्डी चकित हो गये।

संख्याओं के ऊपर उनके शोध कार्य हैं तथा उपर्युक्त खोज तो वे तभी कर सके थे जब वे मैट्रिक के छात्र थे।

ऐसे महान् गणितज्ञ एवं सरस्वतीपुत्र का देहावसान मात्र 32 वर्ष की अल्पायु में दिनांक 26 अप्रैल 1920 को हो गया तथा इनकी मृत्यु के लगभग 37 वर्ष बाद इनकी तीन नोट बुकों की फोटोकापी का प्रथम संस्करण दो बड़ी जिल्दों में टाटा इंस्टीट्यूट ऑफ फण्डामेंटल रिसर्च, मुम्बई द्वारा प्रकाशित किया गया। इसमें इनके द्वारा खोज किये गये 4000 सूत्रों एवं प्रमेयों का संकलन है जिस पर आज विश्वभर के गणितज्ञ खोजबीन में जुटे हुए हैं।

इनकी प्रतिभा का एक उदाहरण है इन्होंने वृत्त की परिधि एवं व्यास के अनुपात (π) के अधिक से अधिक शुद्ध मान प्राप्त करने के लिए जो सूत्र प्रस्तुत किये हुए हैं, उसके आधार पर आज सुपर कम्प्यूटर (π) का शुद्धमान दशमलव के लाखों स्थानों तक प्रस्तुत करने में सक्षम हो रहे हैं।

रामानुजन की नोटबुकों की यह भव्य विरासत देश-विदेश के अनेक शोधकर्ताओं और गणितज्ञों के लिए आगे आने वाले अनेक दशकों तक शोध का विषय रहेंगी तथा उन्हें ''गणितज्ञों का गणितज्ञ'' कहना कोई अतिशयोक्ति नहीं है।

रामानुजन के जन्म से लगभग पौने चार वर्ष पूर्व भारतीय गणित की गौरवशाली परम्परा में जिस एक अन्य महान भारतीय गणितज्ञ का जन्म हुआ, वही हैं महान् स्वामी श्री भारती कृष्ण तीर्थ जी महाराज जिन्होंने वैदिक गणित के 16 सूत्रों एकाधिकेन पूर्वेण, निखिलं नवतः चरमं दशतः, ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्, परावर्त्य योजयेत् आदि को प्रस्तुत किया जिसके आधार पर परिकलन कार्य अत्यन्त सरल, सुगम्य और संक्षिप्त हो सका है। उन्होंने संख्या पद्धति में कुछ नये आयाम जोड़े हैं। आगे हम उनकी चर्चा तथा गणित में उनके अनुप्रयोग के लाभ को देखेंगे। सर्वप्रथम हम ''विनकुलम'' को समझने का प्रयास करते हैं।

17.2 विनकुलम

सामान्यतः हम संख्याओं को लिखने में जिन अंकों का प्रयोग करते हैं, वे सभी धनात्मक होते हैं किन्तु वैदिक गणित में ऋणात्मक अंकों का भी प्रयोग करते हैं जिनको व्यक्त करने के लिए इनके ऊपर (–) का चिह्न लगाते हैं, यथा ;

$\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}$

संख्याएँ लिखने में जिस स्थान पर ये अंक होते हैं, वहाँ इनका स्थानीयमान ऋणात्मक समझा जाता है, जैसे $9\bar{1}$ का अर्थ है 90 −1

इसी प्रकार

$9\bar{7}\bar{6}2 = 9\times1000 - 7\times100 - 6\times10 + 2\times1$

$= 9000 - 700 - 60 + 2$

$= 8242$

$14\bar{8}\bar{7}\bar{5} = 1\times10000 + 4\times1000 - 8\times100 - 7\times10 - 5\times1$

$= 10000 + 4000 - 800 - 70 - 5$

$= 14000 - 875$

$= 13125$, इत्यादि।

विनकुलम संख्याएँ

जिन संख्याओं को लिखने में ऋणात्मक अंकों अर्थात् विनकुलम का प्रयोग करते हैं, वे ही संख्याएँ "विनकुलम संख्याएँ" कहलाती हैं। हम साधारण संख्याओं को विनकुलम संख्याओं में तथा विनकुलम संख्याओं को साधारण संख्याओं में बदल सकते हैं। सामान्यतः जिन साधारण संख्याओं में प्रयुक्त अंक 5 या 5 से छोटे होते हैं, उन संख्याओं को विनकुलम में बदलना लाभप्रद नहीं होता। 5 से बड़े अंकों वाली साधारण संख्या को विनकुलम संख्या में बदलने से संख्याएँ शून्य से लेकर 5 तक के अंकों में परिवर्तित हो जाती हैं जिससे गणना कार्य सरल हो जाते हैं, जिनका लाभ हम आगे देखेंगे। अब हम उदाहरण के माध्यम इसे समझेंगे।

साधारण संख्याओं को विनकुलम संख्याओं में बदलना

सामान्यतः हम किसी भी साधारण संख्या को विनकुलम संख्या में बदल सकते हैं तथा एक ही संख्या को कई विनकुलम संख्याओं में बदल सकते हैं, जैसे -

(1) 19 $= 20 - 1 = 2\bar{1}$

(2) 79 $= 80 - 1 = 8\bar{1}$

79 $= 100 - 21 = 1\bar{2}\bar{1}$

(3) 863 $= 800 + 60 + 3$

$= 900 - 37$

$= 900 - 30 - 7$

$= 9\bar{3}\bar{7}$

पुनः 863 $= 900 - 40 + 3$

$= 1000 - 100 - 40 + 3$

$= 1\bar{1}\bar{4}3$

863 $= 870 - 7$

$$863 = 870 - 7$$
$$= 1000 - 130 - 7$$
$$= 1000 - 137$$
$$= 1000 - 140 + 3$$
$$= 1000 - 100 - 40 + 3$$
$$= 1\bar{1}\bar{4}3$$

अब हम किसी साधारण संख्या में 5 से बड़े अंकों को विनकुलम में बदलकर विनकुलम संख्याएँ बनाने के उदाहरणों से समझेंगे। यथा :

उदाहरण के लिए 1873 को विनकुलम में हम निम्नवत् बदल सकते हैं :

$$1873 = 2\bar{1}\bar{3}3$$

इसी प्रकार, $4678 = 5\bar{3}\bar{2}\bar{2}$

$$6587 = 7\bar{4}\bar{1}\bar{3} = 1\bar{3}\bar{4}\bar{1}\bar{3}$$

नियम : यदि संख्या के किसी भी अंक को विनकुलम में बदलते हैं तो उस अंक को 10 में से घटाकर प्राप्त अंक के ऊपर (–) चिह्न लगा देते हैं तथा उस अंक के ठीक बायें वाले अंक में 1 जोड़कर नया अंक प्राप्त कर लिख देते हैं। इसी प्रकार यदि लगातार कई अंकों विनकुलम में बदलते हैं तो सबसे दायें वाले अंक को 10 में से तथा शेष अंकों को 9 में से घटाते हैं तथा अन्तिम अंक जिसे विनकुलम में बदला गया है, उसके ठीक बायें वाले अंक में 1 की वृद्धि कर देते हैं, यथा

$$876873 = 1\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{1}\bar{3}3$$

विनकुलम संख्याओं को साधारण संख्याओं में बदलना

विनकुलम संख्याओं को साधारण संख्याओं में बदलने के लिए यदि संख्या में केवल एक अंक विनकुलम है तो उसे 10 में से घटाकर उसके स्थान पर रख देते हैं और उसके ठीक बायें के अंक में 1 की कमी कर लिख देते हैं, जैसे

$$8\bar{3} = 77$$

$$16\bar{7} = 153$$

$3\bar{8}5 = 225$ इत्यादि

अब यदि किसी संख्या में अंकों का कोई समूह ही (अर्थात् एक साथ लगातार कई अंक) विनकुलम हैं तो सबसे दायें विनकुलम वाले अंक को 10 में से घटायेंगे तथा शेष विनकुलम अंकों को 9 में से घटाकर लिखेंगे तथा समूह के सबसे बायें वाले विनकुलम अंक के ठीक बायें वाले अंक से 1 घटाकर लिखेंगे

उदाहरण - $9\bar{6}\bar{7}\bar{8}5 = 83225$

$4\bar{7}\bar{8}\bar{6}2 = 32142$

$1\overline{678}1 = 03221$

$= 3221,$

17. 3 घटाना

उदाहरण - 1

$$\begin{array}{r} 58349 \\ -\ 27684 \\ \hline \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 58349 \\ \bar{2}\bar{7}\bar{6}\bar{8}\bar{4} \\ \hline 31\bar{3}\bar{4}5 \\ \hline \end{array}$$

अर्थात 30665 उत्तर

उदाहरण 2 - किसी गाँव में 2013 मतदाता हैं। यदि किसी चुनाव में 1789 मतदाताओं ने अपने मताधिकार का प्रयोग किया तो कितने मतदाताओं ने वोट नहीं दिये।

हल -

$$\begin{array}{r} 2\ 0\ 1\ 3 \\ +\ \bar{1}\ \bar{7}\ \bar{8}\ \bar{9} \\ \hline 1\bar{7}\ \bar{7}\ \bar{6} \\ \hline = 0224 \end{array}$$

अर्थात् 224 मतदाताओं ने वोट नहीं दिये।

विशेष

घटाने का वैदिक सूत्र है :-

''परावर्त्य योजयेत्''

अर्थात् घटायी जाने वाली संख्या का परावर्त्य (योगात्मक प्रतिलोम) को जोड़ते हैं।

किसी संख्या का परावर्त्य ज्ञात करने के लिए उसके सभी अंकों के ऊपर (−) चिह्न लगा दें और फिर प्राप्त संख्या को जोड़ दें। उपर्युक्त उदाहरण (2) में इसी सूत्र का प्रयोग किया गया है।

17.4 बीजीय व्यंजकों को जोड़ना व घटाना, मिश्रित गणनाएँ

वैदिक गणित की दृष्टि से अंकगणित के समान ही बीगणित की भी संरचना है तथा उनके सिद्धान्तों में भी पर्याप्त समानताएँ हैं। इनमें प्रमुख अन्तर बस इतना है कि जहाँ अंकगणित ''व्यक्त'' राशि की बात करती है, वहीं बीजगणित ''अव्यक्त'' राशि की बात करती है। इसी कारण अंकगणित को ''व्यक्त गणित'' और बीजगणित को ''अव्यक्त गणित'' भी कहते हैं।

अंकगणित की दाशमिक संख्या-पद्धति में जहाँ अंकों के स्थानीय मान होते हैं जो आधार 10के दायें से बायें क्रमशः 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, ... के रूप में होते हैं, यथा

लाख	दस हजार	हजार	सैकड़ा	दहाई	इकाई
10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
=100000	=10000	=1000	=100	=10	=1

उपर्युक्त सारणी से स्पष्ट है कि बायें स्थान का मान ठीक दायें वाले स्थान के मान का दस गुना है।

इसी प्रकार बीजगणित के x-आधारित संख्या पद्धति में संख्या में प्रत्येक स्थान का मान x के घात के रूप में निरूपित होता है जो निम्नवत् है:

पंचम	चतुर्थ	तृतीय	द्वितीय	प्रथम	शून्य	स्थान
x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	$x^0=1$	(घातांक के अनुसार)

उपर्युक्त सारणी से स्पष्ट है कि बायें स्थान का मान उसके ठीक दायें वाले स्थान के मान का x गुना होता है। अब ध्यान से देखें कि

जहाँ अंकगणित संख्या पद्धति में 15 $= 1\times10^1 + 5\times10^0$

$= 1\times10 + 5 = 10 + 5$

वहीं बीजगणितीय संख्या पद्धति में 15 $= 1 \times x^1 + 5 \times x^0 = x + 5$

इसी प्रकार x-आधार पद्धति में

$$465 = 4 \times x^2 + 6 \times x^1 + 5 \times x^0$$

$$= 4x^2 + 6x + 5$$

$$8973 = 8 \times x^3 + 9 \times x^2 + 7 \times x^1 + 3 \times x^0$$

$$= 8x^3 + 9x^2 + 7x + 3$$

विलोमतः बीजगणित के बहुपदीय व्यंजकों को x आधारित संख्या पद्धति की सहायता से आंकिक संख्याओं में परिवर्तित कर सकते हैं, यथा :

बहुपदीय व्यंजक	x-आधार वाली संख्याएँ				आंकिक संख्याएँ
	तृतीय	द्वितीय	प्रथम	शून्य	
	x^3	x^2	x^1	x^0	
$3x + 7$			3	7	37
$5x^2 + 7x + 2$		5	7	2	572
$6x^3 + 5x + 9$	6	0	5	9	6059
$2x^3 + 8$	2	0	0	8	2008

उपर्युक्त से यह स्पष्ट है कि x आधारित संख्या पद्धति का प्रयोग कर बीजगणित के बहुपदीय व्यंजकों को अंकों में व्यक्त कर सकते हैं। अतः बीजगणित की समस्त संक्रियाएँ भी अंकगणित की भाँति की जा सकती हैं। सर्वप्रथम हम जोड़ने की संक्रिया पर विचार करेंगे।

(अ) योग संक्रिया

हम जानते हैं कि अंकगणित में योग-संक्रिया में अंकों को यथास्थान जोड़ते हैं। बीजगणित में भी इसी प्रकार योगफल ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 1 : $3x^3 + x^2 - 7$, $4x^4 + 5x - 2$ तथा $5x^2 - 8x + 6$ का योगफल ज्ञात कीजिए

हल :

x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
	3	1	0	−7
4	0	0	5	−2
		5	−8	6
4	3	6	−3	−3

अतः दिये गये व्यंजकों का योगफल $= 4x^4 + 3x^3 + 6x^2 - 3x - 3$ उत्तर

उदाहरण 2 : व्यंजकों $8x^4 - 6x^2 + 9$, $10x^3 + 7x$ तथा $-2x^3 + 5x + 12$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल :

x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
8	0	−6	0	9
	10	0	7	0
	−2	0	5	12
8	8	−6	12	21

अतः अभीष्ट योगफल $= 8x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 12x + 21$

विशेष - ध्यान दें, यहा आधार x अज्ञात है, अतः अंकगणित में संख्याओं का योग करते समय जो शुद्धांक (हासिल) लेते हैं, वैसा बीजगणित में व्यंजकों के योगफल में नहीं ले सकते।

(ब) घटाने की संक्रिया

योग संक्रिया की भाँति ही व्यंजकों के घटाने में भी यथा स्थान अंकों को घटाते हैं।

उदाहरण 1 : $(8x^3 + 5x^2 - 9x + 12)$ में से $(5x^3 + 7x + 7)$ को घटाइए।

हल :

x^3	x^2	x^1	x^0
8	5	−9	12
5	0	7	7
−	−	−	−
3	5	−16	5

अतः अभीष्ट अन्तरफल $3x^3 + 5x^2 - 16x + 5$ उत्तर

उदाहरण 2 : $(4x^3 - 7x + 8)$ में से $(2x^4 + 5x^2 - 9x)$ को घटाइए

हल :

x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
	4	0	−7	8
2	0	5	−9	0
−	−	−	+	−
−2	4	−5	+2	8

अतः अभीष्ट अन्तरफल $(-2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 2x + 8)$ उत्तर

(स) मिश्रित गणनाएँ

उदाहरण : एक विद्यालय में कक्षा 8, कक्षा 7 एवं कक्षा 6 में पंजीकृत छात्र-छात्राओं की संख्या क्रमशः $(5x^2 + 7x + 11)$, $(4x^2 - 8x + 15)$ तथा $(6x^2 + 5x + 9)$ है। उपर्युक्त पंजीकृत सम्पूर्ण छात्र-छात्राओं में से किसी कार्य दिवस को कुल $(2x^2 - 3x + 6)$ छात्र-छात्राएँ अनुपस्थित थे, तो उस दिन उपस्थित छात्र-छात्राओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल :

x^2	x^1	x^0
5	7	11
4	−8	15
6	+5	+9
15	+4	+35

अतः कुल पंजीकृत छात्र-छात्राएँ $(15x^2 + 4x + 35)$ हैं। अब इनमें से $(2x^2 - 3x + 6)$ छात्र-छात्राएँ अनुपस्थित हैं, अतः घटाने की क्रिया कर उपस्थित छात्र छात्राओं की संख्या ज्ञात करेंगे।

अतः

x^2	x^1	x^0
15	4	35
2	−3	+6
−	+	−
13	7	29

अर्थात् $(13x^2 + 7x + 29)$ छात्र-छात्राएँ उपस्थित रहे। - उत्तर

17.4 विभाजनीयता के नियम (आवर्त दशमलव)

(1) 3, 7, 9 की विभाजनीयता

हम जानते हैं कि जिन भिन्नों के हर के गुणनखण्ड 2 और 5 के अतिरिक्त कोई अन्य अभाज्य संख्या या संख्याएँ होती हैं, उनको असांत आवर्ती दशमलव में बदल सकते हैं। वैदिक गणित में ऐसी भिन्नों जैसे ($\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}$) आदि को असांत आवर्ती दशमलव में बदलने के बड़े सरल नियम हैं। यहाँ हम इसी विधि को समझने का प्रयास करेंगे।

यदि आप असांत आवर्त दशमलव में परिवर्तित होने वाले भिन्न पर ध्यान दें तो आप पायेंगे कि ऐसे भिन्नों के हर के इकाई वाले अंक और उसे असांत आवर्ती दशमलव संख्या में बदलने पर प्राप्त आवर्ती दशमलव के अंतिम अंक का गुणनफल 9 अथवा गुणनफल का बीजांक 9 होगा।

उदाहरण 1 : $\frac{1}{6} = 0.1666.... = 0.1\dot{6}$

यहाँ आवर्ती दशमलव का अंतिम अंक = 6

भिन्न $\frac{1}{6}$ का इकाई वाला अंक = 6

अब $6 \times 6 = 36$ का बीजांक $= 3 + 6 = 9$

उदाहण 2 : $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$

स्पष्टतः भिन्न के हर की इकाई = 7

आवर्ती दशमलव का अंतिम अंक = 7

स्पष्टतः $7 \times 7 = 49$ का अंतिम अंक 9 है।

उपर्युक्त से यह स्पष्ट है किसी भिन्न के हर का अंतिम अंक (अर्थात् इकाई का अंक) 9 हो तो स्पष्टतः उसे आवर्ती दशमलव में बदलने पर आवर्ती दशमलव का अंतिम अंक अवश्य ही 1 होगा। अतः यदि $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{7}$ को ऐसी समतुल्य भिन्नों में बदल दें जिनके हर का अंतिम अंक 9 हो जाय तो फिर यह सुनिश्चित है कि उसके तुल्य आवर्ती दशमलव का अंतिम अंक 1 होगा (क्योंकि उसी दशा में भिन्न के अंतिम अंक 9 तथा आवर्ती के अंतिम अंक 1 का गुणनफल 9 के बराबर होगा।)

अतः यहाँ $\frac{1}{3}$ को $\frac{3}{9}$ तथा $\frac{1}{7}$ को $\frac{7}{49}$ में बदल देंगे।

प्रचालक -

अब हम ऐसी भिन्नों को आवर्ती दशमलव में बदलने के लिए एक कुंजी, जिसे हम 'प्रचालक संख्या' कहेंगे, 'एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र' से ज्ञात करेंगे। जैसे $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ में हर 9 है, उसके पूर्व का अंक 0 है अतः यहाँ प्रचालक $= 0 + 1 = 1$

अतः $\frac{3}{9}$ को आवर्ती दशमलव में बदलने के लिए प्रचालक 1 का भिन्न $\frac{3}{9}$ के अंश में दायें से बायें बढ़ने के क्रम में निरन्तर गुणा करते जायेंगे,

यथाः $\frac{3}{9}$ = ..., 3×1= 3, 3×1= 3, 3×1= 3,

अर्थात $\frac{3}{9} = 0.333.... = 0.\dot{3}$

अतः $\frac{3}{9} = \frac{1}{3} = 0.\dot{3}$

इसी प्रकार $\frac{1}{7} = \frac{7}{49}$ में हर 49 का 'एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र' से प्रचालक = 4 +1 = 5

अतः 5 का $\frac{7}{49}$ के अंश में क्रमशः दायें से बायें के बढ़ते क्रम में गुणा करते जायेंगे।

यथाः $\frac{7}{49}$ के आवर्ती दशमलव का इकाई का अंक = 7

अब 7 में प्रचालक 5 का गुणा करने पर गुणनफल 7 × 5 = 35 प्राप्त हुआ अतः उक्त आवर्ती संख्या का इकाई के ठीक बायीं ओर का अंक 5 होगा और 35 के दहाई वाला अंक अगले गुणनफल से प्राप्त संख्या में जोड़कर जो संख्या प्राप्त करेंगे, उसका इकाई वाला अंक आवर्ती संख्या का दायें से बायीं ओर का तीसरा अंक होगा। यहाँ

$\frac{7}{49} = 85\dot{7}$ (5×5 = 25, 25+3=28)

23

इसी प्रकार $\frac{7}{49} = 285\dot{7}$ (5×8 = 40, 40+2= 42)

423

पुनः $\frac{7}{49} = {}_{1}4{}_{4}2{}_{2}8{}_{3}5\dot{7}$ (5×2 = 10, 10+4 = 14)

पुनः $\frac{7}{49} = 14285\dot{7}$ $(5\times4 = 20,\ 20+1 = 21)$

21423

पुनः $\frac{7}{49} = 714285\dot{7}$ $(5\times1 = 5,\ 5+2 = 7)$

21423

ज्यों ही उपर्युक्त क्रिया के चरण में 7 का अंक, जो कि आवर्ती का सबसे अंतिम वाला अंक 7 है, प्राप्त होगा, अंकों की दायें से बायें के उसी क्रम में आवृत्ति होती जायेगी, अतः $\frac{1}{7} = \frac{7}{49} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$

अब $\frac{1}{9}$ पर विचार करें। स्पष्टतः $\frac{1}{9}$ के आवर्ती दशमलव का अंतिम अंक 1 होगा तथा इसके हर का प्रचालक $= 0+1 = 1$

अतः $\frac{1}{9} = \dot{1}$ (आवर्त दशमलव का अंतिम अंक)

यहाँ यह स्पष्ट है कि हम 1 में जब प्रचालक का गुणा करेंगे तो $1\times1 = 1$ ही प्राप्त होगा। अतः 1 के ठीक बायें का अंक भी 1 ही होगा। इसी प्रकार इसके ठीक बायें का अंक भी 1 ही होगा।

$\therefore \quad \frac{1}{9} = 0.111... = 0.\dot{1}$

इसी प्रकार आप देख सकते हैं कि

$\frac{2}{9} = 0.\dot{2},\ \frac{4}{9} = 0.\dot{4},\ \frac{8}{9} = 0.\dot{8}$ आदि।

17.6 गुणा

वैदिक गणित में गुणा की विधियाँ अत्यन्त सरल हैं। आधार पद्धति का उपयोग कर गुणा अत्यन्त सरलतापूर्वक किया जा सकता है। हम देखते हैं कि आधार पद्धति है क्या ?

आधार पद्धति

आधार सदैव 10 की कोई घात या स्वयं 10 होता है। इस प्रकार आधार क्रमशः 10, 100, 1000, 10000,... होते हैं। यदि इन आधारों के समीप की दो संख्याओं का परस्पर गुणा करने हैं तो सर्वप्रथम हम "निखिलं सूत्र" का प्रयोग कर संख्याओं का आधार से विचलन ज्ञात करते हैं। यदि संख्या आधार से छोटी है तो विचलन ऋणात्मक होगा और यदि संख्या आधार से बड़ी है तो विचलन धनात्मक होगा।

उदाहरण : 107 का आधार 100 से विचलन 7 है क्योंकि 107 आधार 100 से 7 अधिक है। और 94 का आधार 100 से विलचन −6 होगा क्योंकि 94 आधार 100 से कम है। आधार से विचलन ज्ञात करने के लिए सूत्र "निखिलं नवतः चरमं दशतः" का प्रयोग करते हैं। सूत्र का अर्थ है - "प्रत्येक को 9 से और अंतिम को 10 से", यदि संख्या आधार से छोटी है। जैसे 985 का आधार 1000 से विचलन 9−9 = 0, 9−8 = 1, 10−5 = 5

अर्थात अभीष्ट विचलन 015 या 15 है।

इसी प्रकार 83 का आधार 100 से विचलन

9−8 = 1, 10−3 = 7 अर्थात् 17 है।

अब आधार पद्धति के प्रयोग से हम दो संख्याओं का परस्पर गुणा की क्रिया करते हैं।

उदाहरण 1 : 97 × 93

यहाँ आधार 100 है।

100 से 97 का विचलन 9−9 = 0, 10−7 = 3

अर्थात् −3

इसी प्रकार 93 का विचलन = −7

90 / 00

+ (−3) × (−7)

अर्थात् 90/21 = 9021 उत्तर

क्रियाविधि

(1) सर्वप्रथम संख्याओं (गुण्य व गुणक) को आधार से विचलन के साथ उपर्युक्त जैसा लिखते हैं।

(2) संख्याओं का उपर्युक्त प्रदर्शित तिर्यक योग ज्ञात करते हैं, यथा

$97 + (-7) = 90$

या $93 + (-3) = 90$

इसकी शुद्धता की जाँच हम आधार 100 में विचलन वाली दोनों संख्याओं के योग को जोड़कर कर सकते हैं।

यथा $100 + \{(-7) + (-3)\}$

$= 100 - 10$

$= 90$

अब गुणनफल का प्रथम भाग 90 है तथा इसके आगे आधार में जितने शून्य हैं, उतने शून्य रख देते हैं

यथा 90/00

अब दायें भाग में विचलन का वास्तविक गुणनफल वाली संख्या का योग कर देते हैं, जैसा कि ऊपर किया गया है। इसी विधि का प्रयोग हम आगे सभी प्रश्नों में करेंगे।

उदाहरण 2 :

विचलन

112   +12

× 96   −4   (आधार 100 है)

108 / 00

/ + (12) × (−4)

अर्थात् 10800

− 48

10752   उत्तर

उदाहरण 3 -

विचलन

1002   +2

× 1012   +12   (आधार 1000)

1014 / 000

/ + 24

1014024   उत्तर

उदाहरण 4 - विचलन

10025 +25

× 10016 +16 (आधार 10000)

10041 / 0000

/ + 400

100410400 उत्तर

उदाहरण 5 - (आधार 10000) विचलन

10008 +8

× 9992 −8

10000 / 0000

/ 00 $\bar{6}\bar{4}$ (विनकुलम)

1000000 $\bar{6}$ $\bar{4}$

= 99999936 उत्तर

अपवर्त्य तथा अपवर्तक

जब दो ऐसी संख्याओं का परस्पर गुणा करना होता है, जो आधार से बहुत दूर होती हैं तब "अनुरूप्येण" (अर्थात् अनुपात से) सूत्र का प्रयोग करते हैं और एक सुविधाजनक आधार का अपवर्तक या अपवर्त्य ज्ञात करते हैं।

उदाहरण 6 - (यहाँ आधार 10 का अपवर्त्य 20 है, अतः 20 से हम विचलन ज्ञात करेंगे।)

विचलन

23 +3

× 22 +2

25 / 0

25×2 = 50 / +6

= 506 उत्तर

(ध्यान दें, $\therefore 20 = 10 \times 2$ इसीलिए 25 में 2 का गुणा कर गुणनफल का बायाँ पक्ष ज्ञात किया गया है।

उदाहरण 7 - उपाधार 50

उपाधार 50, आधार 100 का एक अपवर्तक है

और $50 = \frac{1}{2} \times 100$

विचलन

उदाहरण 8 :

यहाँ उपाधार 250= आधार 1000 का $\frac{1}{4}$ है।

विचलन (250 से)

$$\begin{array}{ll} 251 & +1 \\ \times 255 & +5 \\ \hline 256 & \end{array}$$

$256 \times \frac{1}{4}$

$$= \quad 64 \,/\, 000$$

$$\quad\quad / + \ 5$$

64005 उत्तर

उत्तर की जाँच बीजांक से

गुण्य और गुणक के बीजांकों के गुणनफल का बीजांक, सदैव गुण्य और गुणक के गुणनफल के बीजांक के बराबर होता है। इस तथ्य के द्वारा हम गुणनफल की शुद्धता की जाँच सरलतापूर्वक कर सकते हैं जैसे उपर्युक्त उदाहरण (7) में,

गुण्य 53 का बीजांक $= 5 + 3 = 8$

गुणक 47 का बीजांक $= 4 + 7 = 11 = 1 + 1 = 2$

तथा गुणनफल 2491 का बीजांक $= 2 + 4 + 9 + 1 = 16 = 7$

स्पष्टतः गुण्य तथा गुणक के बीजांकों 8 एवं 2 का गुणनफल $= 8 \times 2 = 16$

अब 16 का बीजांक $= 1 + 6 = 7$

जो उपर्युक्त गुण्य एवं गुणक के गुणनफल के बीजांक 7 के तुल्य है।

अतः अभीष्ट गुणनफल शुद्ध है।

इसी प्रकार गुणनफल के किसी भी प्रश्न में हम उत्तर की जाँच ''बीजांक विधि'' से कर सकते हैं।

टिप्पणी - बीजांक विधि से हम योगफल, अन्तरफल, भागफल, वर्ग, वर्गमूल, घन तथा घनमूल आदि सभी की शुद्धता की जाँच कर सकते हैं।

17.7 पहाड़ा बनाना

विनकुलम के प्रयोग से हम संख्याओं का पहाड़ा भी लिख सकते हैं। यहाँ तक कि केवल 10 स्तर तक ही नहीं, मनोवांछित स्तर तक

उदाहरण - 19 का पहाड़ा

$$19 = 20 - 1 = 2\bar{1}$$

प्रथम स्तर	---	$2\bar{1}$	=	$20 - 1$	=	19
द्वितीय स्तर	---	$4\bar{2}$	=	$40 - 2$	=	38
तृतीय स्तर	---	$6\bar{3}$	=	$60 - 3$	=	57
चतुर्थ स्तर	---	$8\bar{4}$	=	$80 - 4$	=	76
पंचम स्तर	---	$10\bar{5}$	=	$100 - 5$	=	95
षष्ठम स्तर	---	$12\bar{6}$	=	$120 - 6$	=	114
सप्तम स्तर	---	$14\bar{7}$	=	$140 - 7$	=	133
अष्टम स्तर	---	$16\bar{8}$	=	$160 - 8$	=	152
नवम स्तर	---	$18\bar{9}$	=	$180 - 9$	=	171
दशम स्तर	---	$2\bar{1}0$	=	$200 - 10$	=	190

ग्यारहवाँ स्तर --- $2\,1\,\bar{1}$ = $210 - 1$ = 209

बारहवाँ स्तर --- $2\,3\,\bar{2}$ = $230 - 2$ = 228

उदाहरण - 89 का पहाड़ा

$89 = 100 - 10 - 1 = 1\,\bar{1}\,\bar{1}$

प्रथम स्तर	---	$1\,\bar{1}\,\bar{1}$	=	$100 - 11$	=	89
द्वितीय स्तर	---	$2\,\bar{2}\,\bar{2}$	=	$200 - 22$	=	178
तृतीय स्तर	---	$3\,\bar{3}\,\bar{3}$	=	$300 - 33$	=	267
चतुर्थ स्तर	---	$4\,\bar{4}\,\bar{4}$	=	$400 - 44$	=	356
पंचम स्तर	---	$5\,\bar{5}\,\bar{5}$	=	$500 - 55$	=	445
षष्ठम स्तर	---	$6\,\bar{6}\,\bar{6}$	=	$600 - 66$	=	534
सप्तम स्तर	---	$7\,\bar{7}\,\bar{7}$	=	$700 - 77$	=	623
अष्टम स्तर	---	$8\,\bar{8}\,\bar{8}$	=	$800 - 88$	=	712
नवम स्तर	---	$9\,\bar{9}\,\bar{9}$	=	$900 - 99$	=	801
दशम स्तर	---	$1\,\bar{1}\,\bar{1}\,0$	=	$1000 - 110$	=	890
ग्यारहवाँ स्तर	---	$10\,\bar{2}\,\bar{1}$	=	$1000 - 21$	=	979
बारहवाँ स्तर	---	$11\,\bar{3}\,\bar{2}$	=	$1000 - 32$	=	1068

इसी प्रकार विनकुलम के सिद्धान्त से कोई भी पहाड़ा (तालिका) बिना किसी कठिनाई के लिख सकते हैं।

विशेष : गणित में योग, घटाना, गुणा एवं भाग इत्यादि में विनकुलम का प्रयोग करने से परिकलन सरल बन जाता है।

उदाहरण 1 :

$$
\begin{array}{r}
5\,\bar{3}\,\bar{2}\,\bar{4} \\
+\; 6\,\bar{5}\,\bar{6}\,9 \\
\hline
1\,1\,\bar{8}\,\bar{8}\,5 \\
\hline
\end{array}
= 10125 \text{ उत्तर}
$$

उदाहरण 2 :

$$
\begin{array}{r}
2\bar{5}4\bar{7}4 \\
+\; 6\bar{3}2\,1 \\
\hline
211\bar{5}\,5 \\
\hline
\end{array}
= 21055 \text{ उत्तर}
$$

भारतीय गणितज्ञ एवं उनकी महान् कृतियाँ

क्रम	नाम	काल	कृतियाँ
1	बौधायन	800 ई. पू.	बौधयन शुल्क सूत्र
2	आर्यभट प्रथम	476 ई.	आर्यभटीय (499 ई.)
3	वराह मिहिर	505ई. - 587 ई.	वृहज्जातक, वृहत् संहिता, पंच सिद्धान्तिका
4	ब्रह्मगुप्त	598ई.	''ब्राह्मस्फुट - सिद्धान्त'' (628 ई.) खण्ड खाद्यक
5	भास्कराचार्य प्रथम	629ई.	महाभास्करीय, लघु भास्करीय
6	महावीराचार्य	850ई.	गणितसार संग्रह
7	आर्यभट्ट द्वितीय	950 ई.	महाआर्यभट्टीय, महाआर्य सिद्धान्त
8.	श्रीधराचार्य	991 ई.	गणितसार (त्रिशतिका), जातक-तिलक
9	श्रीपति मिश्र	1039 ई.	पाटीगणित, बीजगणित, सिद्धान्त शेखर
10	नेमीचन्द्र सिद्धान्त चक्रवर्ती	11वीं शती	गोम्मटसार
11	भास्कराचार्य द्वितीय	1114ई.1185ई.	सिद्धान्त शिरोमणि, लीलावती, करण-कुतूहल
12	नारायण पण्डित	1356 ई.	गणित कौमुदी
13	नीलकण्ठ	1356 ई.	ताजिकनीलकण्ठी
14	कमलाकर	1608 ई.	सिद्धान्त तल विवेक
15	सम्राट जगन्नाथ	1731 ई	सम्राट सिद्धान्त, रेखागणित
16	नृसिंह बापूदेव शास्त्री	1831 ई.	रेखागणित, त्रिकोणमिति, अंकगणित
17	श्री निवास रामानुजन	1887 ई.	रामानुजन की डायरी
18	स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ जी	1884 ई.	वैदिक गणित
19	सुधाकर द्विवेदी	1860ई.-1922ई.	गोलीय रेखागणित
20	डॉ. गणेश प्रसाद	1876ई.-1935ई.	मैथेमेटिकल फिजिक्स ऐण्ड डिफरेंशियल इक्वेशन्स ऐट दबिगिनिंग ऑफ द ट्वान्टयथ सेन्युरी
21	शकुन्तला देवी (मानव कम्प्यूटर	जन्मतिथि 4.11.1929	शकुन्तला देवीज़ द बुक ऑफ नम्बर्स, शकुन्तला देवी मोर पज़ल्स

इन्हे भी जानें

मूलांक के चमत्कार

भारतीय गणितज्ञों ने अपने गणितीय ग्रंथो में जोड़-घटाना, गुणा-भाग एवं वर्गमूल-घनमूल जैसी संक्रियाओं की विधियाँ बताने के साथ ही मूलांक का प्रयोग करके इन संक्रियाओं की शुद्धता के परीक्षण का अनोखा ज्ञान दिया है।

मूलांक

किसी भी संख्या का मूलांक ज्ञात करने के लिए उस संख्या के अंकों को तब तक जोड़ते जाइए जब तक कि योगफल मूल अंकों 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 में से किसी एक के रूप का न हो जाय। मूलांक 9 को 0 (शून्य) भी मानते हैं। मूलांक की गणना निम्न उदाहरण के द्वारा स्पष्ट की गयी है-

उदाहरण 1- 830896517 का मूलांक ज्ञात कीजिए।

हल - दी हुई संख्या के अंकों का योगफल

$= 8 + 3 + 0 + 8 + 9 + 6 + 5 + 1 + 7 = 47$

$= 47 = 4 + 7 = 11 = 1 + 1 = 2$

अत: दी गयी संख्या का मूलांक 2 है।

अतः मूलांक की सहायता से योग, व्यवकलन (घटाना), गुणन, भाग, वर्ग, घन, वर्गमूल तथा घनमूल की जाँच करना निम्न उदाहरणों के द्वारा सीखेंगे-

उदाहरण 2- संख्याओं 17526, 1493 का योगफल ज्ञात कीजिए और उत्तर की जाँच कीजिए-

हल -

	मूलांक			योग
17526	3	1+7+5+2+6 =	21 = 2 + 1 = 3	3 + 8 = 11 = 2
+1493	8	1+4+9+3 =	17 = 1 + 7 = 8	
19019	2	1+9+0+1+9 =	20 = 2 + 0 = 2	

उदाहरण 3- 42307 में से 29568 को घटाइए और उत्तर की जाँच कीजिए-

हल -

	मूलांक
42307	7
- 29568	3
12739	4